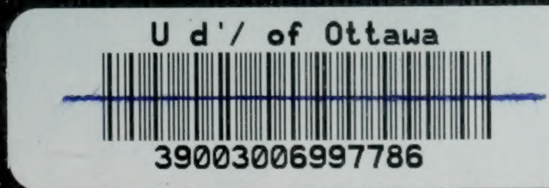

U d'/ of Ottawa
39003006997786

LES

SPECTRES NUMÉRIQUES

60307 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.

LES
SPECTRES NUMÉRIQUES

PAR

Michel PETROVITCH,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE.

PRÉFACE DE M. ÉMILE BOREL.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

PRÉFACE.

Les nombres décimaux sont, après les nombres entiers, les êtres arithmétiques que nous connaissons le mieux; la diffusion du système métrique conduit de plus en plus à les substituer dans les calculs aux fractions ordinaires; pour le praticien, tous les nombres sont des nombres décimaux. Cette notion de nombre décimal nous est devenue si familière et nous paraît si simple que nous avons une tendance naturelle à considérer également la fraction décimale illimitée comme le plus simple des êtres mathématiques dans la définition desquels entre la notion de l'indéfini ou, plus précisément, de l'infini énumérable. Il y a une part d'illusion dans cette tendance; en fait, dès que l'on veut approfondir l'étude d'une définition quelconque où figure l'infini, on rencontre des difficultés extrêmement grandes, et dont la plupart paraissent devoir rester longtemps, sinon toujours, insurmontables, car elles tiennent à l'essence même de notre esprit, à son incapacité de concevoir nettement le transfini; toute classification transfinie ne peut jamais être achevée. Tous les problèmes qui peuvent se poser dans l'étude des fonctions définies par des conditions énumérables (par exemple, des fonctions continues de plusieurs variables) peuvent être transposés, en principe, en problèmes relatifs à la définition d'une seule fraction décimale; mais cette vue théorique n'est pas d'un grand secours tant qu'on ne définit pas d'une manière concrète la correspondanee qui peut être établie entre la fonction et la fraction décimale; ce serait, le plus souvent, une

complication inutile que l'on obtiendrait au lieu d'une simplification.

Mais, ces réserves faites, il n'est pas douteux que nos habitudes font de la fraction décimale illimitée la forme d'infini la moins malaisée à concevoir et la plus maniable; si donc il est possible de ramener l'étude de certaines questions d'analyse à la considération précise de certaines fractions décimales, on y gagnera, tout au moins, une forme d'exposition ou un procédé de calcul qui pourront être précieux; parfois même, certaines analogies mises en évidence pourront suggérer des idées nouvelles et mettre sur la voie de découvertes. Il y a là un champ d'études illimité, où la difficulté principale, comme dans bien des questions mathématiques, consiste à choisir les formes logiques intéressantes et fécondes parmi l'infinité de celles qui s'offrent à nous.

Le Livre que M. Michel Petrovitch a bien voulu me demander de présenter au public scientifique est une intéressante contribution à l'étude des relations entre les fractions décimales et les séries de puissances entières d'une variable. M. Petrovitch a beaucoup réfléchi sur les analogies entre les diverses sciences et leurs méthodes variées. Son esprit ingénieux et fécond a souvent tiré de rapprochements inattendus, des conséquences intéressantes et des théories nouvelles. Il excelle à rendre intuitives ces analogies par un langage expressif et imagé. Sa théorie des spectres, qui transporte en analyse la terminologie usitée en analyse spectrale, est très séduisante; je n'entreprendrai pas de la résumer, car je ne pourrais que répéter les explications même de M. Petrovitch : ses lecteurs, que je lui souhaite nombreux, trouveront dans ce Livre, sous une forme aussi claire et simple que possible, l'exposition complète de sa théorie, rendue lumineuse par des exemples bien choisis.

On voit que cet Ouvrage est consacré à l'une des branches les plus ardues des mathématiques : les relations entre la théorie des

fonctions et l'arithmétique transcendante; cette branche de l'analyse est, si l'on peut ainsi dire, au berceau, et il est vraisemblable que ses progrès ne seront pas rapides, car les difficultés y sont énormes; les lecteurs qui approfondiront les problèmes soulevés par ce Livre comprendront mieux la nature de quelques-unes de ces difficultés; ce ne sera pas là le moindre des profits qu'ils retireront de cette lecture, par ailleurs attrayante par le choix ingénieux et varié des applications.

Émile Borel.

Juillet 1919.

LES

SPECTRES NUMÉRIQUES

INTRODUCTION.

C'est un fait aujourd'hui bien connu qu'une suite de chiffres, formant un nombre réel positif, peut présenter autant de diversité et résumer autant de complications qu'une fonction d'un nombre quelconque de variables. En langage précis de la théorie des ensembles, on l'exprime en disant que, d'une part, l'ensemble de fonctions d'une variable a une puissance au plus égale à la puissance de l'ensemble des ensembles de nombres réels positifs (et même, si l'on veut, de nombres compris entre 0 et 1) et que, d'autre part, si l'on fait l'abstraction de la continuité de la correspondance entre deux ensembles continus, il n'y a pas de différence essentielle entre les ensembles continus à une dimension et les ensembles continus à n dimensions, c'est-à-dire entre les fonctions d'une variable et les fonctions à n variables [1].

De là, à se demander s'il est possible de *représenter effectivement une fonction par un nombre*, avec une correspondance définie entre les éléments déterminants de la fonction et la suite de chiffres composant le nombre, il n'y a qu'un pas.

C'est à cet ordre d'idées que se rattache la théorie des *spectres numériques* dont nous présentons dans ce petit livre une première esquisse et à laquelle la question posée tout à l'heure offre un champ d'applications intéressantes.

On apprend dès le début de l'Algèbre que, pour résoudre *en*

(1) E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions* (Gauthier-Villars, Paris, 1914, 2e édit., Chap. I et Notes I et III).

nombres un problème à plusieurs inconnues, il faut autant d'équations *numériques* distinctes qu'il y a d'inconnues. Mais certains problèmes des plus élémentaires semblent déjà contredire cette assertion. On connaît, par exemple, de ces problèmes-devinettes qu'on se propose en matière de distraction dans les sociétés, où le calculateur (devin) se fait fort de deviner presque instantanément *plusieurs* nombres pensés d'après *une seule* donnée numérique qu'on lui énonce et qui est le résultat final d'un calcul auquel il n'assiste pas. La contradiction comme on sait n'est qu'apparente : en réalité, ce sont plusieurs données numériques qu'on fournit au devin sous l'apparence d'une seule dont les *segments*, groupes de chiffres convenablement délimités, lui révèlent directement ces données.

Ces petits jeux arithmétiques suggèrent l'idée d'en généraliser l'artifice pour qu'il puisse s'étendre à des problèmes plus importants et moins simples. Et il se trouve, en effet, que ces problèmes élémentaires ne sont que des cas très particuliers d'un problème d'ordre général, résoluble par le même artifice et consistant à *calculer numériquement une suite limitée ou illimitée d'inconnues, et par cela aussi une fonction inconnue, par une segmentation appropriée de la valeur numérique d'une seule donnée* S, *le mode de segmentation étant indiqué par les conditions du problème*.

Dans la théorie que nous exposons, la donnée numérique S est celle que prend une expression analytique déterminée Φ, convenablement rattachée à la suite d'inconnues du problème, pour une certaine valeur particulière d'une variable qu'elle contient. Nous l'appelons *spectre* de la suite d'inconnues, primitives ou auxiliaires du problème. La manière dont les inconnues se déterminent à l'aide de S, et laquelle n'est qu'une adaptation appropriée de l'artifice du devin dans les petits jeux arithmétiques cités, rappelle, en effet, celle dont le spectre lumineux, dans l'Analyse spectrale chimique, révèle les éléments entrant dans la composition du corps analysé. Ainsi, un spectre numérique se trouve être composé de groupes N_k de chiffres significatifs séparés par un nombre plus ou moins grand de zéros intercalés, comme un spectre lumineux se compose de cannelures et de raies séparées par les parties sombres. Le nombre de zéros intercalés (déterminant la dispersion du

spectre numérique) change avec la variation d'un paramètre que le calculateur est maître de faire varier à son gré à partir d'une certaine grandeur, comme l'étendue des parties sombres (déterminant la dispersion du spectre lumineux) change avec la variation de la température, ou de la pression, que l'expérimentateur peut modifier à son aise. Le groupe numérique N_k (la $k^{\text{ième}}$ cannelure du spectre) détermine à la simple inspection le nombre entier jouant le rôle d'une inconnue primitive ou auxiliaire du problème, et le chiffre de rang i du groupe N_k (la $i^{\text{ième}}$ raie de la $k^{\text{ième}}$ cannelure spectrale) détermine le $i^{\text{ième}}$ chiffre de l'inconnue. C'est là un procédé analogue à celui employé dans l'Analyse spectrale chimique.

On a ainsi un procédé de calcul que nous sommes tentés d'appeler le *procédé spectral de calcul numérique* et qui consiste à *disperser* en un spectre numérique les valeurs des inconnues, comme le prisme disperse le faisceau des rayons lumineux en un spectre lumineux, l'expression analytique Φ, la *génératrice spectrale* du problème y jouant ainsi un rôle analogue à celui du prisme analyseur. Et il se trouve que le procédé est susceptible de fournir à la fois, et par la continuation suffisante d'un même calcul numérique, les valeurs d'autant d'inconnues qu'on le veut d'un problème auquel il s'applique, ainsi qu'individuellement chaque chiffre et chaque décimale d'une quelconque de ces inconnues. De plus, il permet de déterminer les *valeurs exactes* d'un nombre voulu d'inconnues à l'aide d'une valeur *suffisamment approchée* d'un seul nombre S.

Le procédé spectral, sous la forme exposée dans ce livre, s'applique à tous les problèmes *dont les inconnues se laissent mettre en correspondance définie avec une série de puissances à coefficients nombres entiers*. Grâce à l'arbitraire que comporte la notion d'une telle correspondance, des problèmes de cette espèce se rencontrent dans toutes les branches de calcul, depuis les problèmes les plus élémentaires d'Arithmétique, d'Algèbre, de Calcul de Probabilités, jusqu'aux problèmes variés de Calcul Infinitésimal et de la Théorie des Fonctions.

Ainsi, une certaine fonction rationnelle conduit à un spectre de la partition de nombres, indiquant, à simple vue, de combien de manières un entier variable se laisse exprimer comme combinaison linéaire homogène d'une suite donnée d'entiers positifs.

La série de Lambert conduit à un spectre des nombres de diviseurs d'un entier variable, ainsi qu'à des spectres dont les éléments présentent des rapports simples avec les nombres premiers.

Le procédé spectral de développement en séries diffère entièrement des procédés actuellement connus. Il consiste à former un spectre rattaché à la fonction à développer en série, lequel, par ses cannelures et ses raies, fournit directement ou par un calcul connu soit tous les coefficients du développement à la fois, soit un ensemble voulu de ces coefficients, soit séparément tout coefficient voulu, ou même un chiffre d'un rang voulu, d'un coefficient. Le spectre lui-même se calcule, à l'aide de la fonction considérée, comme valeur numérique d'une expression en termes finis, d'une intégrale simple ou multiple, etc.

Les intégrales définies simples ou multiples, en correspondance définie avec une série de puissances à coefficients nombres entiers, se calculent soit sous la forme même d'un spectre, soit à l'aide des éléments (cannelures et raies) d'un spectre.

Mais c'est, croyons-nous, dans le domaine de la théorie des fonctions que la méthode spectrale peut conduire à des résultats les plus intéressants. Notamment, *elle fournit des moyens efficaces de représenter une fonction analytique par une suite de chiffres*. La représentation s'effectue à l'aide d'un *spectre de la fonction* avec l'adjonction d'un ensemble d'indications sur ses rapports avec la fonction, concernant les signes, le mode de segmentation du spectre convenant au problème, et les relations des segments spectraux avec la fonction.

Ces dernières relations restent immuables pour les fonctions faisant partie d'une même *catégorie spectrale* de fonctions, une telle catégorie étant caractérisée par un ensemble de particularités *d'ordre arithmétique* rattachées aux coefficients du développement de la fonction arbitraire de la catégorie et concernant la manière de rendre ces coefficients collectivement nombres *entiers* par une suite d'opérations déterminées effectuées sur la fonction. On arrive ainsi à déterminer complètement des fonctions définies par des conditions très larges et dépendant dans un autre mode de classification d'un nombre *infini* de paramètres, à l'aide de données numériques en nombre *fini*, ce nombre variant d'une

catégorie de fonctions à une autre, mais restant immuable pour les fonctions d'une même catégorie. C'est, par exemple, ainsi que l'ensemble de fonctions $f(z)$ développables en série de puissances de z à coefficients a_n nombres entiers apparaît comme une catégorie de fonctions à *deux* paramètres; que l'ensemble de fonctions à a_n nombre commensurable à dénominateur dont le nombre de chiffres de la partie non périodique et celui de la période n'augmentent pas indéfiniment avec n, forme une catégorie à *quatre* paramètres, ce nombre se réduisant à *trois* pour les fonctions à a_n fraction décimale périodique simple ou à un nombre fini de décimales; que l'ensemble de fonctions algébriques à a_n commensurable forme également une catégorie à *quatre* paramètres, etc.

Cependant, la méthode spectrale n'est guère bornée à des catégories déterminées de fonctions. *Toute fonction analytique $f(z)$ peut être représentée dans un cercle quelconque du plan des z dans lequel elle est holomorphe, et avec une approximation voulue, par un nombre et un ensemble d'indications sur les rapports entre les segments de ce nombre et la fonction.*

Divers éléments caractéristiques des fonctions analytiques se laissent résumer, condenser, en un seul nombre et un ensemble de telles indications. Tel est, par exemple, le cas des *singularités* d'une fonction comprises dans un cercle ayant pour centre un point ordinaire de la fonction; le cas des *zéros* d'une fonction méromorphe compris dans un cercle, etc.

Il est bien entendu que dans ce petit livre la question posée au début de cette Introduction n'est qu'effleurée et envisagée du point de vue spécial de la théorie des spectres numériques. Les recherches plus approfondies sur les correspondances entre les fonctions et les suites de chiffres conduiront à des résultats autrement intéressants.

Il nous reste à dire un mot sur les termes employés dans l'exposition de la théorie.

Les termes : *spectre*, *spectre continu*, *spectre discontinu*, *spectre segmentaire* ont déjà été employés dans des domaines tout différents de celui de la théorie que nous exposons. Dans ses recherches bien connues sur la théorie des transformations orthogonales d'une forme quadratique à un nombre infini de variables, M. Hilbert introduit la notion du spectre d'une forme quadra-

tique en le définissant comme l'ensemble d'affixes de certains points réels, zéros de discriminants de telles formes ([1]). Le spectre ainsi défini est composé de points situés sur l'axe réel. Ces points peuvent former un ensemble dénombrable de points isolés : c'est le spectre discontinu. Ils peuvent aussi être distribués sur des segments de l'axe réel partout dense : c'est le spectre segmentaire ou continu. Ces notions et ce langage interviennent dans la théorie des équations intégrales où elles sont introduites par l'intervention même de formes quadratiques à un nombre infini de variables dans cette nouvelle branche d'Analyse.

Cependant, ces termes suggérés par des analogies vagues et lointaines, dont aucun profit particulier ne saurait être tiré dans cette dernière théorie, n'y sont nullement indispensables et ne s'y imposent guère. On peut traiter les problèmes dans lesquels on les a fait ainsi intervenir, sans les employer et sans que cela porte le moindre préjudice à la théorie ni à la facilité de son exposition. Par contre, ils s'imposent dans les problèmes que nous traitons, d'une part par les analogies réelles et frappantes que la méthode spectrale présente avec les procédés usités en Analyse spectrale chimique, et d'autre part par les simplifications qu'ils y apportent et que l'on appréciera en parcourant les Chapitres qui suivent ([2]).

([1]) D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Vierte Mitteilung Götting. Nachrichten*, 1906).

([2]) Plusieurs des résultats contenus dans ce livre ont eté communiqués à l'Académie des Sciences de Paris (séances du 7 mai et du 14 mai 1917, du 17 septembre 1917 et du 25 novembre 1918).

PREMIÈRE PARTIE.

SPECTRES NUMÉRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

SPECTRES NUMÉRIQUES ET LEURS ÉLÉMENTS.

I. — Suites d'entiers réels positifs.

1. Soient

(1) $$N_0, \quad N_1, \quad N_2, \quad \ldots$$

une suite des nombres entiers réels positifs, h_k un entier positif supérieur ou égal au nombre de chiffres de N_k, et λ_k^i le $i^{\text{ième}}$ chiffre de N_k, le rang i du chiffre étant compté, comme on le fait en Arithmétique, de droite vers la gauche.

Formons le groupe numérique

(2) $$G_k = 00\ldots0N_k$$

composé du nombre N_k précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre total de chiffres du groupe (2) soit égal à h_k.

Formons ensuite le nombre

(3) $$G_0 G_1 G_2 \ldots G_m$$

obtenu en écrivant bout à bout, à la suite les uns des autres, les groupes numériques G_0, G_1, G_2, ... et où les groupes des chiffres significatifs de deux entiers consécutifs N_{k-1} et N_k, sans que jamais les uns empiètent sur les autres, peuvent se trouver séparés par des zéros en nombre plus ou moins considérable suivant que l'écart entre h_k et le nombre effectif l_k de chiffres significatifs de l'entier N_k est plus ou moins grand.

La suite (3) ainsi formée rappelle les spectres lumineux des

corps incandescents : les groupes

$$(4) \qquad \lambda_k^{l_k}\lambda_k^{l_k-1}\ldots\lambda_k^2\lambda_k^1$$

de chiffres significatifs y correspondraient aux cannelures du spectre; les zéros qui les séparent correspondraient aux parties sombres, et les chiffres significatifs eux-mêmes aux raies spectrales dont l'ensemble caractérise un élément N_k par leur valeur et leur position relative dans le spectre.

C'est par une telle assimilation, permettant d'abréger le langage et de rendre l'exposition plus claire, que nous désignerons :

1° La suite de chiffres formant le nombre (3) après y avoir séparé G_0 et G_1 par la virgule décimale, comme *spectre* de la suite numérique (1);

2° La partie de (3) composée des chiffres significatifs de l'entier N_k comme $k^{\text{ième}}$ *partie brillante* ou $k^{\text{ième}}$ *cannelure* du spectre;

3° La partie de (3) composée des zéros interposés entre les chiffres significatifs de N_{k-1} et ceux de N_k, comme $k^{\text{ième}}$ *partie sombre* du spectre;

4° L'ensemble G_k de ces deux parties de rang k comme $k^{\text{ième}}$ *tranche* spectrale;

5° Le chiffre λ_k^i dans (3) comme $i^{\text{ième}}$ *raie de la* $k^{\text{ième}}$ *cannelure spectrale* (ou de la $k^{\text{ième}}$ tranche spectrale);

6° L'*étendue* de la $k^{\text{ième}}$ tranche spectrale est mesurée par l'entier h_k, celle de sa partie brillante par l_k et celle de sa partie sombre par la différence $h_k - l_k$;

7° L'entier m indique le nombre total de tranches spectrales; le spectre est *limité* ou *illimité* suivant que m est fini ou infini;

8° La loi de variation de l'entier h_k avec son rang k représente le *rythme spectral;* celui-ci est *uniforme* lorsque

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_m,$$

c'est-à-dire lorsque toutes les tranches spectrales ont la même étendue; il est *uniformément accéléré* lorsque l'étendue de la tranche croît proportionnellement à son rang, c'est-à-dire lorsque $h_k = h + ck$, où h et c sont deux entiers positifs ne variant pas avec k; le rythme sera *à accélération croissante* lorsque l'entier c augmente avec k; il sera *oscillant* si h_k subit des variations oscil-

lantes lorsque k croît d'une manière progressive; il sera *périodique* si les variations de h_k sont périodiques, etc.;

9° La différence $h_k - l_k$ mesure la *dispersion* du spectre, constante ou variable avec k; le spectre est le plus *amassé* possible, c'est-à-dire *à dispersion nulle* lorsque les parties sombres y disparaissent et les cannelures se touchent.

Lorsqu'on se donne la suite (1) et le rythme h_k de son spectre, on formera ce spectre en formant les groupes numériques correspondants G_0, G_1, G_2, ... et en les écrivant bout à bout sur une rangée, suivant l'ordre naturel de leurs rangs.

Inversement, lorsqu'on se donne le spectre (3) et son rythme h_k, le terme N_k de la suite correspondante (1) est fourni par la $k^{ième}$ cannelure du spectre.

Le spectre, par exemple, de la suite naturelle de nombres à deux chiffres

$$11, \quad 12, \quad 13, \quad \ldots, \quad 98, \quad 99$$

à rythme uniforme $h_k = 3$ serait

$$011012013\ldots098099;$$

sa dispersion est constante et égale à 1.

Le spectre de la suite de coefficients binomes

$$\binom{7}{0}, \quad \binom{7}{1}, \quad \ldots, \quad \binom{7}{7}$$

à rythme uniformément accéléré $h_k = 1 + k$ est

$$10702100350003500002100000070000000 1$$

et sa dispersion est croissante.

Le spectre de la suite illimitée des coefficients, nombres entiers, du développement de $f(z) = \dfrac{2 + 37x}{1 - x^2}$ à rythme oscillant

$$h_k = \frac{1}{2}(3 - \cos k\pi)$$

est

$$237\,237\,237\ldots;$$

il est périodique et à dispersion nulle.

2. Un rythme h_k est à considérer comme *compatible avec une suite* (1) *donnée* si l'on a $h_k - l_k \geqq 0$ pour toutes les valeurs $k = 1, 2, \ldots, m$ (l'entier h_0 pouvant être quelconque, son augmentation ne produisant jamais l'empiètement du groupe G_0 sur les autres).

On a à cet égard les règles suivantes :

Première règle. — *Une suite* (1) *limitée admet toujours comme rythme compatible le rythme uniforme $h_k = h$, où h est un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite* (abstraction faite de son premier terme).

Car l'on a $N_k \leqq 10^h$ et par suite $l_k \leqq h$.

Deuxième règle. — *Une suite* (1) *limitée ou illimitée, dont les termes* (abstraction faite du premier) *ne surpassent pas un nombre fixe* B, *admet comme rythme compatible le rythme uniforme $h_k = h$ où h désigne un entier quelconque supérieur ou égal à* $\log B$.

(Comme dans la règle précédente.)

Troisième règle. — *Une suite* (1) *illimitée telle que $\sqrt[n]{N_n}$ n'augmente pas indéfiniment avec n admet comme rythme compatible un rythme uniformément accéléré.*

Car alors N_n, pour toute valeur de n, reste inférieur à une certaine expression AB^n où A et B sont des nombres indépendants de n qu'on peut prendre supérieurs ou égaux à 1 ; on a donc

$$N_n \leqq 10^{h+cn},$$

où h est un entier supérieur ou égal à $\log A$, et c un entier supérieur ou égal à $\log B$; la suite (1) admet ainsi le rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$.

Ainsi, une suite (1) dont le terme général N_n s'exprime par une intégrale définie de la forme

$$N_n = \int_a^b u r^n \, dt,$$

u étant une fonction de t finie et positive entre les limites supposées finies a et b, et r une fonction de t finie entre ces limites, admet toujours un rythme uniformément accéléré. En effet, en désignant par A la valeur de N_0 et par B la plus grande valeur

de r entre les limites d'intégration, on a

$$N_n \leq AB^n.$$

Par exemple, pour la suite illimitée (1) ayant comme termes

$$\binom{2}{1}, \quad \binom{4}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \ldots,$$

on a

$$N_n = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, dt,$$

de sorte que $A = 1$, $B = 4$ et la suite admet le rythme $h_k = k$.

Quatrième règle. — *Une suite* (1) *illimitée telle que* $\sqrt[n]{N_n}$ *reste intérieure à* AB^n, *où* A *et* B *sont deux constantes finies fixes, admet comme rythme compatible le rythme à accélération croissante* $h_k = h + ck + gk^2$ *où* h, c, g *sont trois entiers positifs convenablement choisis.*

Car alors N_n reste, pour toute valeur de n, plus petit qu'une certaine expression

$$CA^n B^{n^2} \leq 10^{h+cn+gn^2},$$

où h, c, g sont les entiers positifs supérieurs ou égaux aux valeurs respectives de $\log C$, $\log A$, $\log B$.

Cinquième règle. — *Une suite* (1) *limitée ou illimitée, admettant un rythme* h_k, *admettra aussi tout rythme* h'_k *tel que* $h'_k \geq h_k$ *pour* $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Une suite, par exemple, admettant un rythme uniforme $h_k = h$, admettra en même temps tout rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, ainsi que tout rythme à accélération croissante $h_k = h + ck + gk^2 + \ldots$ quels que soient les entiers positifs c, g, ...

II. — Suites d'entiers quelconques.

3. Étant donnée une suite

(5) $$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad \ldots$$

d'entiers *quelconques*, réels ou imaginaires, positifs ou négatifs,

et θ_k étant l'une des quatre valeurs

$$(6) \qquad 1, \quad -1, \quad i, \quad -i \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

on peut toujours lui adjoindre une suite

$$(7) \qquad \theta_0, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots$$

telle que la partie réelle et le coefficient de i de la partie imaginaire de chaque terme de la suite

$$(8) \qquad \theta_0 M_0, \quad \theta_1 M_1, \quad \theta_2 M_2, \quad \ldots$$

soient positives.

En effet, si elles sont de même signe, il suffira de prendre $\theta_k = \sigma_k$ où σ_k désigne l'unité affectée du signe de la partie réelle de M_k; si elles sont de signes contraires, on prendra $\theta_k = i\sigma_k$.

Dans le cas où M_k est réel, on prendra $\theta_k = \sigma_k$, et s'il est purement imaginaire, on prendra pour θ_k l'unité affectée de signe de $-iM_k$.

Lorsque les M_k sont tous réels (positifs ou négatifs) ou bien tous purement imaginaires (à coefficients de i positifs ou négatifs), on considérera comme spectre de la suite (5) celui de la suite d'entiers positifs (8).

Lorsque les M_k sont des entiers complexes, on considérera comme spectre de la suite (5) le nombre complexe $S + iS'$ composé de deux spectres, l'un S étant celui des entiers positifs p_0, p_1, p_2, ... et l'autre S' celui des entiers positifs q_0, q_1, q_2, ..., où p_k et q_k sont la partie réelle et le coefficient de i de la partie imaginaire de l'entier complexe

$$(9) \qquad \theta_k M_k = p_k + iq_k.$$

Un rythme spectral h_k est compatible avec la suite (5) s'il est à la fois compatible avec chacune des deux suites p_k et q_k. Il en sera, par exemple, ainsi de tout rythme compatible avec la suite E_0, E_1, E_2, ... où E_k désigne un entier positif égal ou supérieur au module de M_k.

La formation du spectre d'une suite d'entiers quelconques se ramène ainsi à celle d'un ou de deux spectres d'entiers réels positifs.

CHAPITRE II.

LA GÉNÉRATRICE SPECTRALE.

I. — Définition et propriété fondamentale.

4. Le fait suivant est fondamental pour la formation des spectres numériques :

Étant donnée une suite, limitée ou illimitée, d'entiers quelconques, on peut lui faire correspondre une fonction $\Phi(x)$ *dont la valeur numérique* S *pour une valeur particulière* $x = x_0$ *de la variable* x *fournit un spectre de la suite à un rythme compatible avec celle-ci.*

Pour le faire voir, distinguons les deux cas suivants :

Premier cas. — La suite est composée d'entiers réels positifs

$$N_0, \quad N_1, \quad N_2, \quad \ldots \tag{10}$$

Soient : l_k le nombre de chiffres de l'entier N_k; h_k un entier positif supérieur ou égal à l_k; G_k le groupe numérique défini précédemment rattaché à N_k, et supposons d'abord que la suite (10) soit composée d'un nombre *limité* m de termes.

Formons la suite d'entiers positifs

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad \ldots \tag{11}$$

définis par la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{aligned} P_{k+1} &= P_k + h_k \\ P_1 &= h_1 \end{aligned} \right. \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{12}$$

c'est-à-dire la suite

$$\left\{ \begin{aligned} &P_1 = h_1, \\ &P_2 = h_1 + h_2, \\ &P_3 = h_1 + h_2 + h_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Formons ensuite les nombres rationnels positifs

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_m, \tag{14}$$

tels que

$$g_k = 10^{-P_k} \tag{15}$$

et à l'aide d'eux le polynome de degré m en x

$$\Phi_m(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \ldots + g_m N_m x^m. \tag{16}$$

On a le théorème suivant :

La valeur numérique $\Phi_m(1)$ *représente le spectre de la suite* (10) *à rythme* h_k.

En effet, la valeur $g_k N_k$ est un nombre fractionnaire ayant comme partie entière zéro et comme partie décimale $P_k - l_k$ zéros consécutifs suivis de chiffres significatifs de N_k. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (17) \quad & g_1 N_1 + g_2 N_2 + \ldots + g_m N_m \\ & = 0,\underbrace{0\ldots\ldots 0}_{h_1 - l_1 \text{ zéros}} N_1 \underbrace{0\ldots\ldots 0}_{h_2 - l_2 \text{ zéros}} N_2 \underbrace{0\ldots\ldots 0}_{h_3 - l_3 \text{ zeros}} N_3 0\ldots = 0, G_1 G_2 \ldots G_m \end{aligned}$$

et comme $h_k - l_k \geqq 0$, la proposition se trouve démontrée.

Supposons maintenant la suite (10) *illimitée*. Le polynone $\Phi_m(x)$ devient une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

$$\Phi(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \ldots. \tag{18}$$

Le théorème précédent subsiste à la condition de choisir la suite d'entiers positifs $h_1, h_2, h_3, \ldots$, caractérisant le rythme spectral, de manière que la série (18), ayant pour coefficient général

$$g_k N_k = N_k \, . \, 10^{-P_k} = N_k \, . \, 10^{-h_1 + h_2 + \ldots + h_k},$$

converge uniformément pour $x = 1$, ce qui est manifestement toujours possible.

La fonction $\Phi(x)$ ainsi formée, se réduisant à un polynone en x pour une suite (10) limitée, et en une série de puissances de x pour une suite (10) illimitée, sera désignée comme *génératrice spectrale* de cette suite, correspondant au rythme spectral h_k

d'après lequel elle a été formée. La valeur numérique $S = \Phi(1)$ coïncide avec le spectre envisagé.

Deuxième cas. — La suite est composée d'entiers quelconques

$$(19) \qquad M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad \ldots$$

réels ou imaginaires, positifs ou négatifs. A l'aide de facteurs (7) formons la suite d'entiers

$$(20) \qquad \theta_0 M_0, \quad \theta_1 M_1, \quad \theta_2 M_2, \quad \ldots$$

caractérisés par la propriété de n'avoir ni la partie réelle ni le coefficient de i de la partie imaginaire négatifs. Soit h_k un rythme compatible avec la suite (20) et formons la suite correspondante d'entiers P_k définis par (13), et la suite g_k définie par (15).

La génératrice spectrale de la suite (19) *sera la fonction*

$$(21) \qquad \Phi(x) = \theta_0 M_0 + \theta_1 M_1 x + \theta_2 M_2 x^2 + \ldots$$

et la valeur numérique $S = \Phi(1)$ *fournira le spectre ou les deux spectres de la suite* (19) *suivant que ses termes sont tous réels ou non.*

Il arrive, comme on le verra dans la suite, que la génératrice spectrale d'une suite considérée s'exprime sous d'autres formes analytiques, par exemple en termes finis, à l'aide d'une combinaison déterminée de fonctions connues, sous la forme d'une intégrale définie simple ou multiple dans laquelle x figure comme paramètre, etc. De même, le spectre S s'exprime souvent par des combinaisons numériques simples, par des intégrales définies portant sur des fonctions connues, etc.

Remarque I. — On pourrait former d'autres génératrices spectrales, fournies, par exemple, par des séries exponentielles ou par des séries de puissances à plusieurs variables. Dans cet Ouvrage nous nous en tiendrons aux génératrices de la forme précédente.

Remarque II. — On pourrait former, d'une manière analogue à la précédente, des spectres et leurs génératrices pour un système de numération autre que le système décimal, et en particulier pour le système de numération de base 2, pour lequel le spectre ne serait composé que de chiffres 0 et 1.

II. — Modes de formation des génératrices spectrales.

5. Il y a lieu de distinguer les deux cas suivants :

Premier cas. — La suite d'entiers M_k est donnée. Si elle a tous ses termes réels et positifs, on calculera la suite de facteurs g_k correspondant au rythme spectral voulu h_k et l'on écrira directement

$$\Phi(x) = M_0 + g_1 M_1 x + g_2 M_2 x^2 + \dots \tag{22}$$

Si les M_k ne sont pas tous réels et positifs, on formera, en plus, la suite correspondante θ_k et l'on écrira directement

$$\Phi(x) = \theta_0 M_0 + \theta_1 g_1 M_1 x + \theta_2 g_2 M_2 x^2 + \dots \tag{23}$$

Dans le cas, par exemple, de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, on aura

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n M_n q^{n^2} (\beta x)^n, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \qquad \beta = 10^{-\left(h + \frac{c}{2}\right)}$$

et le spectre sera

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n M_n q^{n^2} \beta^n.$$

On cherchera ensuite, s'il y a lieu, à transformer une telle expression directe de $\Phi(x)$ en une combinaison explicite de fonctions connues, en une intégrale définie, etc.

Deuxième cas. — On connaît, sous une forme analytique quelconque, la fonction $f(x)$ dont le développement inconnu

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \dots \tag{24}$$

a les termes de la suite M_k comme coefficients et le rayon d'holomorphie r autour de $x = 0$ non nul.

1° Envisageons d'abord le cas des entiers M_k *admettant un rythme spectral uniforme* $h_k = h$ (cas des suites M_k limitées, ou bien des suites M_k illimitées, mais dont les termes ne croissent pas

indéfiniment) et à l'aide de facteurs θ_k rattachés aux M_k, formons (lorsque c'est possible) la fonction

(25) $$\psi(x) = \theta_0 M_0 + \theta_1 M_1 x + \theta_2 M_2 x^2 + \ldots$$

La génératrice spectrale sera fournie par l'expression

(26) $$\Phi(x) = \psi(10^{-h} x)$$

et le spectre sera

(27) $$S = \psi(10^{-h}).$$

Lorsque les M_k sont réels et de même signe, ou complexes à parties réelles et imaginaires de même signe, la fonction $\psi(x)$ se réduit (à un facteur θ près) à $f(x)$; s'ils sont réels alternativement positifs et négatifs, on a $\psi(x) = f(-x)$; s'ils sont imaginaires à parties réelles positives et parties imaginaires négatives, on a $\psi(x) = if(x)$, et si c'est le contraire, on aurait $\psi(x) = -if(x)$; si les parties réelles, ainsi que les parties imaginaires sont alternativement positives et négatives, on aurait $\psi(x) = if(-x)$, etc.

La fonction $\psi(x)$ s'exprime d'ailleurs, et cela de diverses manières, par une intégrale définie portant sur $f(x)$ et sur la fonction

(29) $$\lambda(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \ldots$$

(ne dépendant que des signes des parties réelles et imaginaires des M_k et nullement de leurs valeurs numériques) holomorphe dans le cercle de rayon 1 ayant l'origine comme centre. Cette dernière fonction se réduit à

$$\lambda(x) = \frac{1}{1 - x}$$

ou bien à

$$\lambda(x) = \frac{1}{1 + x}$$

lorsque les M_k sont réels positifs, ou bien alternativement positifs et négatifs.

2° Envisageons maintenant le cas d'une suite M_k *telle que* $\sqrt[k]{|M_k|}$ *ne croît pas indéfiniment avec* k [tel est le cas de toute suite d'entiers réels ou imaginaires figurant comme coefficients du développement suivant les puissances de x d'une fonction $f(x)$ holo-

morphe au voisinage de $x=0$]. La suite admet un rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$ où h et c sont des entiers positifs, et l'on aura pour un tel rythme

$$(30) \qquad g_k = 10^{h_1+h_2+\dots+h_k} = 10^{-hk-\frac{k(k+1)}{2}c}.$$

Formons la fonction auxiliaire

$$(31) \qquad \chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n q^{n^2+\lambda n} x^n,$$

où

$$(32) \qquad \lambda = 1 + \frac{2h}{c}, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}},$$

qui est une fonction *entière* transcendante de x, ne dépendant que des constantes h et c du rythme, et des signes des parties réelles et imaginaires des M_k avec lesquels varient les θ_n. On aura le théorème suivant :

La génératrice spectrale de la suite M_k, *pour le rythme* $h_k = h + ck$, *est fournie par l'expression*

$$(33) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right)dt,$$

où ρ *désigne une constante arbitraire de module plus petit que le rayon* r *d'holomorphie de* $f(z)$ *autour de* $z=0$.

Pour le montrer, nous rappellerons un théorème connu sur les séries de puissances. Soient deux séries

$$(34) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \\ \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \end{cases}$$

convergentes dans des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons respectifs r et r_1 ; la série

$$(35) \qquad a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \dots$$

a son rayon de convergence au moins égal à rr_1 et sa somme égale à la valeur de l'intégrale définie

$$(36) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1 e^{ti})\varphi(x_2 e^{-ti})\,dt,$$

x_1 et x_2 étant deux valeurs quelconques indépendantes de t, de modules respectivement inférieurs à r et à r_1, et satisfaisant à la relation $x_1 x_2 = x$.

Faisons

$$a_k = \mathrm{M}_k, \qquad b_k = \theta_k . 10^{-hk + \frac{k(k+1)}{2} c},$$

de sorte que $f(x)$ coïncide avec la fonction (24), et $\varphi(x)$ avec (31). En prenant pour x_1 une valeur constante quelconque ρ de module plus petit que r et pour x_2 la valeur $\frac{x}{\rho}$, comme l'on a $r_1 = \infty$, les conditions du dernier théorème sont remplies et la génératrice spectrale sera bien représentée par l'expression (33). Il s'ensuit également que :

Le spectre de la suite des M_k à rythme $h_k = h + ck$ coïncide avec la valeur numérique de l'intégrale définie

$$(37) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) \chi \left(\frac{e^{-ti}}{\rho} \right) dt,$$

indépendante de la constante arbitraire ρ, pourvu que le module de celle-ci soit plus petit que r.

Les expressions (33) et (37) peuvent, dans des cas généraux, être remplacées par d'autres qui leur sont équivalentes.

Ainsi, lorsque les M_k sont tous réels, en posant

$$(38) \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \log \mathrm{nat}\, 10 = 1{,}151292\ldots, \\ b = (2c + h) a, \end{cases}$$

ce qui fournit

$$g_k = e^{-ak^2 - bk},$$

et d'après la formule connue

$$e^{-ak^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2kt\sqrt{a}\, dt \qquad (k > 0,\ a > 0),$$

la génératrice spectrale pour le rythme $h_k = h + ck$ s'exprime sous la forme

$$(39) \qquad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{R}(\alpha x, \beta t)\, dt,$$

où il faut attribuer aux constantes α et β les valeurs

$$\alpha = e^{-b}, \qquad \beta = 2\sqrt{a}, \tag{40}$$

et où $R(r, \varphi)$ désigne la partie réelle de $f(re^{\varphi i})$.

Remarquons aussi que dans le cas des M_k réels positifs s'exprimant par une intégrale définie de la forme

$$M_k = \int_a^b uv^k\,dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{41}$$

où u et v sont fonctions de t, la génératrice spectrale s'exprime par l'intégrale définie

$$\Phi(x) = \int_a^b u\,\theta(vx)\,dt, \tag{42}$$

où $\theta(x)$ est la transcendante entière connue

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+\lambda n} x^n, \tag{43}$$

les constantes λ et q étant définies par (32).

3° Envisageons le cas d'*un rythme quelconque à accélération croissante*. Formons la fonction auxiliaire

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \theta_n g_n x^n + \theta_0 M_0, \tag{44}$$

où

$$g_n = 10^{-P_n} = 10^{-(h_1+h_2+\ldots+h_n)}. \tag{45}$$

La génératrice spectrale sera encore représentée par l'expression (33) *et le spectre par* (37) *à la condition d'y remplacer la fonction* $\chi(x)$ *par* $\xi(x)$.

Les formules précédentes s'appliquent indistinctement aux suites M_k limitées ou illimitées.

6. Nous indiquerons quelques exemples simples de la formation de la génératrice spectrale et du spectre.

Premier exemple. — Former la génératrice spectrale de la

suite limitée

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$$

à rythme uniforme $h_k = h$ compatible avec la suite. On a

$$f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + mx^m = \frac{mx^{m+2} - (m+1)x^{m+1} + x}{(1-x)^2}$$

et la génératrice sera

$$\Phi(x) = \frac{m.10^{-(m+2)h}\,x^{m+2} - (m+1)10^{-(m+1)h}\,x^{m+1} - 10^{-h}\,x}{(1-10^{-h}\,x)^2}.$$

Le spectre s'obtient comme valeur numérique S de

$$\Phi(1) = \frac{10^{(m+1)h} - (m+1)10^h + m}{10^{mh}(10^h - 1)^2}$$

et l'on a, par exemple, pour $m = 9$, $h = 1$,

$$S = \frac{10^{10} - 10^2 + 9}{10^9 . 9^2} = 0,123456789.$$

Deuxième exemple. — Former la génératrice spectrale de la suite de coefficients binomes

$$\binom{m}{0},\ \binom{m}{1},\ \binom{m}{2},\ \ldots,\ \binom{m}{m}$$

à rythme uniforme $h_k = h$ compatible avec la suite. On a

$$f(x) = (1+x)^m,$$

et la génératrice sera

$$\Phi(x) = (1 + 10^{-h}\,x)^m.$$

Le spectre s'obtient comme valeur numérique S de

$$\Phi(1) = \frac{(10^h + 1)^m}{10^{mh}}$$

et l'on a, par exemple, pour $m = 6$, $h = 2$,

$$S = \frac{101^6}{100^6} = 1,061520150601.$$

Troisième exemple. — Considérons la suite illimitée

$$\binom{2}{1},\ \binom{4}{2},\ \binom{6}{3},\ \ldots$$

de coefficients binomes moyens, s'exprimant par la formule connue

$$\binom{2n}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv^n \, dt,$$

où

$$u = \frac{2}{\pi}, \qquad v = 4\cos^2 t.$$

On en conclut que

$$\binom{2n}{n} < 4^n$$

et que, par suite, le rythme uniformément accéléré $h_k = k$ est compatible avec la suite. La génératrice spectrale à un tel rythme est

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4x\cos^2 t) \, dt,$$

où

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+n} x^n, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

et la valeur numérique $\Phi(1)$ coïncide avec le spectre S de la suite, qui est

$$S = 0{,}102006002000070000252000092 4\ldots.$$

Quatrième exemple. — Considérons la suite illimitée de termes M_n indépendants de x du polynome $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, s'exprimant par la formule connue

$$M_n = \int_0^{\pi} uv^n \, dt,$$

où

$$u = \frac{1}{\pi}, \qquad v = (1 + 2\cos t)^2.$$

On en conclut que $M_n < 9^n$ et que, par suite, le rythme uniformément accéléré $h_k = k$ est compatible avec la suite. La génératrice spectrale à un tel rythme sera

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta[(1 + 2\cos t)^2 x] \, dt,$$

où $\theta(x)$ est la transcendante entière de l'exemple précédent, et la valeur numérique $\Phi(1)$ coïncide avec le spectre S de la suite, qui est

$$S = 0{,}103007001900051000141\ldots.$$

III. — Génératrices d'un spectre à rythme étagé.

7. Il arrive que l'on connaisse, pour une suite considérée d'entiers réels positifs $M_1, M_2, M_3, \ldots$, des limites supérieures des nombres de leurs chiffres, de sorte que

$$(46)\quad \begin{cases} \text{de } k = 1 \text{ à } k = m_1 - 1 & \text{l'entier } M_k \text{ ait au plus } p_1 \text{ chiffres,} \\ \text{de } k = m_1 \text{ à } k = m_2 - 1 & \text{l'entier } M_k \text{ ait au plus } p_2 \text{ chiffres,} \\ \text{de } k = m_2 \text{ à } k = m_3 - 1 & \text{l'entier } M_k \text{ ait au plus } p_3 \text{ chiffres,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Tous les termes du premier intervalle admettent comme rythme compatible commun le rythme uniforme

$$(47)\qquad h_1 = h_2 = \ldots = h_{m_1-1} = p_1.$$

Les termes du second intervalle admettent le rythme uniforme

$$(48)\qquad h_{m_1} = h_{m_1+1} = \ldots = h_{m_2-1} = p_2, \qquad \ldots.$$

Considérons le spectre S_i de i premiers termes

$$(49)\qquad M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_i$$

de la suite M_k, et désignons par q le rang de l'intervalle (46) dans lequel se trouve compris le nombre i, de sorte que

$$(50)\qquad m_{q-1} \leq i \leq m_q - 1,$$

c'est-à-dire que l'entier extrême M_i ait au plus p_q chiffres. La suite (49) admettra comme rythme spectral h_k celui fourni par les égalités (47), (48), ..., les $m_1 - 1$ premières tranches spectrales ayant alors un même rythme $h_k = p_1$, les $m_2 - m_1$ tranches suivantes ayant un même rythme $h_k = p_2$, ... Un tel spectre S_i est un *spectre à rythme étagé*.

L'entier

$$P_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k,$$

représentant pour toute valeur de l'indice k le nombre total de

chiffres de la rangée

(51) $$G_1 G_2 \ldots G_k,$$

où G_j est le groupe numérique (2) relatif à l'entier M_j et à rythme h_k égal au nombre p correspondant, est déterminé de la manière suivante :

1° Le premier intervalle (46) étant caractérisé par les égalités (47), l'entier

$$Q_1 = G_1 G_2 \ldots G_{m_1-1}$$

aura le nombre total de chiffres égal à $(m_1 - 1) p_1$;

2° Le second intervalle (46) étant caractérisé par les égalités (48), l'entier

$$Q_2 = G_{m_1} G_{m_1+1} \ldots G_{m_2-1}$$

aura le nombre total de chiffres égal à $(m_2 - m_1) p_2$;

3° L'entier

$$Q_3 = G_{m_2} G_{m_2+1} \ldots G_{m_3-1}$$

aura en tout $(m_3 - m_2) p_3$ chiffres, etc.

Enfin, l'entier

$$Q_2 = G_{m_{2-1}} G_{m_{2-1}+1} \ldots G_i$$

aura en tout $(i - m_{q-1} + 1)$ chiffres.

Et comme l'entier (51) s'écrit en écrivant bout à bout les q entiers $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$, le nombre total de ses chiffres sera égal à

$$(m_1 - 1) p_1 + (m_2 - m_1) p_2 + \ldots + (m_{q-1} - m_{q-2}) p_{q-1} + (i - m_{q-1} + 1) p_q,$$

c'est-à-dire à

(52) $$i p_q - L_q,$$

où

(53) $$L_q = (p_2 - p_1) m_1 + (p_3 - p_2) m_2 + \ldots + (p_q - p_{q-1}) m_{q-1} + p_1 - p_q.$$

La formule de récurrence

(54) $$L_{q+1} = L_q + (p_{q+1} - p_q)(m_q - 1)$$

rend facile le calcul numérique des L_i de proche en proche.

On arrive ainsi à la règle suivante :

L'exposant P_k ($k = 1, 2, \ldots, i$), *figurant dans l'expression de la génératrice spectrale*

(55) $$\Phi(x) = 10^{-P_1} M_1 x + 10^{-P_2} M_2 x^2 + \ldots + 10^{-P_i} M_i x^i$$

de la suite M_k, *à rythme étagé* $h_k = p_1, p_2, p_3, \ldots$, *est fourni par la formule*

(56) $$P_k = kp_q - L_q,$$

où p_q *et* L_q *restent immuables pour tous les termes* M_k *dont l'indice* k *est compris dans le* $q^{\text{ième}}$ *intervalle* (46).

Comme, d'après ce qui précède,

de $k = 1$	à $k = m_1 - 1$	on a	$P_k = kp_1 - L_1$,
de $k = m_1$	à $k = m_2 - 1$	on a	$P_k = kp_2 - L_2$,
de $k = m_2$	à $k = m_3 - 1$	on a	$P_k = kp_3 - L_3$,
....			...............,

si l'on pose

(57) $$\begin{cases} \varphi_1(x) = M_1 x + M_2 x^2 + \ldots + M_{m_1-1} x^{m_1-1}, \\ \varphi_2(x) = M_{m_1} x + M_{m_1+1} x^2 + \ldots + M_{m_2-1} x^{m_2-1}, \\ \varphi_3(x) = M_{m_2} x + M_{m_2+1} x^2 + \ldots + M_{m_3-1} x^{m_3-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

la génératrice (55) *aura pour expression*

(58) $$\Phi(x) = 10^{-L_1} \varphi_1(10^{-p_1} x) + 10^{-L_2} \varphi_2(10^{-p_2} x) + \ldots.$$

Le premier terme du second membre fournit, pour $x = 1$, le spectre de la suite ($M_1, \ldots, M_{m_1-1}$) à rythme uniforme $h_k = p_1$; la somme de deux premiers termes fournit le spectre de la suite ($M_1, M_2, \ldots, M_{m_2-1}$) à rythme étagé $h_k = p_1$ et $h_k = p_2, \ldots$.

8. Un spectre est *à dispersion nulle* s'il ne présente pas de parties sombres, de sorte que les cannelures spectrales se touchent sans empiéter les unes sur les autres. Tel serait, par exemple, le spectre

123456789 10 11 12 13...

de la suite naturelle de nombres entiers ; ou bien le spectre

$$126241207205040403203628800$$

de neuf premières factorielles, etc.

La génératrice d'un spectre à dispersion nulle s'obtient par la règle du paragraphe précédent, à la condition de considérer comme nombres p_1, p_2, p_3, ... ceux représentant les nombres exacts de chiffres des entiers M_k.

Ainsi, pour le spectre à dispersion nulle de la suite 1, 2, 3, 4, ..., on a $M_k = k$ et

$$m_1 = 10, \quad m_2 = 10^2, \quad m_3 = 10^3, \quad \ldots,$$
$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 3, \quad \ldots,$$

ce qui fournit

$$P_k = kq - L_q,$$

où

$$L_q = 10^{q-1} + 10^{q-2} + \ldots + 10 + 1 - q = 111\ldots1 - q,$$

où q désigne le nombre de chiffres de l'entier M_k auquel la suite s'arrête, et où le nombre des unités dans le chiffre $111\ldots1$ est égal à q. On trouve ainsi :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 9, \quad L_3 = 108, \quad L_4 = 1107, \quad L_5 = 11106, \quad \ldots.$$

On a, d'ailleurs, la relation de récurrence

$$L_{q+1} = L_q + 10^q - 1$$

et une valeur L_q reste immuable pour toute la suite des M_k à q chiffres.

Les polynomes (57) sont fournis par la formule générale

$$\varphi_n(x) = \frac{(10^n - 1)x^{10^n+1} - 10^n x^{10^n} - (10^{n-1} - 1)x^{10^{n-1}+1} + 10^{n-1}x^{10^{n-1}}}{(x-1)^2}$$

résultant de ce qui précède et de la formule connue exprimant les polynomes dont les coefficients sont les termes d'une progression arithmétique.

CHAPITRE III.

LA CARACTÉRISTIQUE SPECTRALE PRINCIPALE.

I. — Définition.

9. Ce qui précède met en évidence les rôles que jouent les deux fonctions

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots, \tag{59}$$

$$\xi(x) = \theta_0 + \theta_1 g_1 x + \theta_2 g_2 x^2 + \ldots \tag{60}$$

dans la formation de la génératrice du spectre d'une suite donnée d'entiers M_k.

La fonction (59) dépend des valeurs seules des termes de la suite et nullement du rythme du spectre considéré. Autrement dit : elle dépend de la composition des cannelures spectrales et est indépendante du mode de répartition des cannelures dans le spectre. Cette fonction, pour une suite M_k considérée, ne varie donc pas d'un spectre à un autre; elle sera désignée comme *caractéristique spectrale principale* de cette suite.

Par contre, la fonction (60) dépend de la répartition des cannelures du spectre des M_k, ainsi que des signes des parties réelles et imaginaires des M_k, mais ne dépend pas des valeurs numériques mêmes de celles-ci. C'est pour cette raison qu'elle sera désignée comme *caractéristique qualitative* du spectre.

Nous nous occuperons, dans ce Chapitre, de la caractéristique spectrale principale. Cette fonction se réduit à un polynome à coefficients nombres entiers pour les spectres limités; elle représente une série de puissances à coefficients nombres entiers pour les spectres illimités.

Dans un grand nombre de cas, cette fonction s'exprime en termes finis à l'aide de fonctions connues. Ainsi :

1° Pour une suite d'entiers M égaux entre eux, elle a pour

expression

$$f(x) = \mathrm{M}\frac{x^{m+1} - x}{x - 1} \qquad \text{ou bien} \qquad f(x) = \frac{\mathrm{M}x}{1 - x},$$

suivant que la suite est limitée ou illimitée;

2° Pour une suite d'entiers qui se reproduisent périodiquement à partir d'un certain rang, la caractéristique est une fonction *rationnelle* de x à coefficients *entiers* : en désignant par n le nombre de termes M_k de la partie non périodique, et par m le nombre de termes de la période de la suite considérée, la caractéristique sera

$$f(x) = \mathrm{P}(x) + \frac{\mathrm{Q}(x)}{1 - x^m},$$

où P et Q sont les deux polynomes

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x) &= \mathrm{M}_1 x + \mathrm{M}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{M}_n x^n, \\ \mathrm{Q}(x) &= \mathrm{M}_{n+1} x^{n+1} + \mathrm{M}_{n+2} x^{n+2} + \ldots + \mathrm{M}_{n+m} x^{n+m}; \end{aligned}$$

3° Pour une suite d'entiers formant une progression arithmétique

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}, \quad \mathrm{A} + 2\mathrm{B}, \quad \mathrm{A} + 3\mathrm{B}, \quad \ldots,$$

on a

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}x}{1 - x} + \frac{\mathrm{B}x}{(1 - x)^2};$$

4° Pour une suite d'entiers formant une progression géométrique

$$\mathrm{AB}, \quad \mathrm{AB}^2, \quad \mathrm{AB}^3, \quad \ldots,$$

on a

$$f(x) = \frac{\mathrm{AB}x}{1 - \mathrm{B}x};$$

5° Pour une suite M_k, où

$$\mathrm{M}_k = p_1^k + p_2^k + \ldots + p_m^k,$$

les p_i étant des entiers donnés, on a

$$f(x) = \mathrm{R}(x) - m,$$

$\mathrm{R}(x)$ désignant le résultat que l'on obtient en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans l'expression $\frac{x\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)}$, où $\mathrm{P}(x)$ est le polynome de degré m,

$$(x - p_1)(x - p_2)\ldots(x - p_m);$$

6° Pour la suite

$$\binom{p}{0},\quad \binom{p}{1},\quad \binom{p}{2},\quad \ldots,\quad \binom{p}{p},$$

on a

$$f(x) = (1+x)^p;$$

7° Pour la suite

$$\binom{1}{0},\quad \binom{2}{1},\quad \binom{4}{2},\quad \binom{6}{3},\quad \ldots,$$

on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Dans d'autres cas, la caractéristique $f(x)$ s'exprime par une intégrale définie portant sur des fonctions connues.

Ainsi, pour la suite de factorielles

$$1!,\quad 2!,\quad 3!,\quad \ldots,\quad m!,$$

on a

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{(xt)^{m+1} - xt}{xt - 1}\, dt;$$

pour la suite illimitée

$$M_k = \binom{2k}{k}^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

on a

$$f(x) = -1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16xt^2)}}.$$

Les règles exposées dans le paragraphe suivant élargissent considérablement le domaine de cas où l'on connaîtra la caractéristique $f(x)$ sous une forme explicite.

II. — Règles pour la formation de la caractéristique spectrale principale.

10. Soient

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots,$$
$$f_1(x) = M'_0 + M'_1 x + M'_2 x^2 + \ldots$$

les caractéristiques spectrales respectives des deux suites M_k et M'_k à termes réels ou imaginaires, positifs ou négatifs, et λ un entier fixe quelconque.

Règle I. — La suite

$$M_0 \pm \lambda, \quad M_1 \pm \lambda, \quad M_2 \pm \lambda, \quad \ldots$$

aura pour caractéristique la fonction

$$f(x) \pm \lambda \frac{x^m - 1}{x - 1} \quad \text{ou bien} \quad f(x) \pm \frac{\lambda}{1 - x},$$

suivant que la suite est limitée à m termes ou illimitée.

Ainsi, dans le cas où les M_k, tous réels et positifs, sont compris entre deux entiers positifs fixes A et B, la série limitée ou illimitée

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots,$$

où $\mu_k = M_k - A$, et, par suite,

$$0 \leqq \mu_k \leqq B - A$$

s'exprime à l'aide de $f(x)$ de la manière indiquée par cette règle. En effet, comme la suite μ_k admet le rythme spectral uniforme $h_k = h$, où h est un entier quelconque supérieur ou égal à $\log(B - A)$, la caractéristique principale de la suite μ_k s'écrit sous la forme

$$f(x) - A \frac{x^m - 1}{x - 1} \quad \text{ou bien} \quad f(x) - \frac{A}{1 - x}$$

et fournira, en y remplaçant x par $10^{-h}x$, la génératrice spectrale de cette suite pour le rythme $h_k = h$.

Règle II. — A la suite λM_0, λM_1, λM_2, ... correspond la caractéristique $\lambda f(x)$.

Règle III. — A la suite M_0, $M_1 \lambda$, $M_2 \lambda^2$, $M_3 \lambda^3$, ... correspond la caractéristique $f(\lambda x)$.

Règle IV. — A la suite M_0, M_1, $2M_2$, $3M_3$, $4M_4$, ... correspond la caractéristique $xf'(x)$; à la suite M_0, M_1, $2^2 M_2$, $3^2 M_3$, $4^2 M_4$, ... correspond

$$x^2 f'' + x^3 f'(x);$$

à la suite M_0, M_1, $2^3 M_2$, $3^3 M_3$, $4^3 M_4$, ... correspond

$$x^3 f'''(x) + (2x + x^3) f''(x) + 3x^2 f'(x), \ \ldots.$$

Règle V. — A la suite

$$M_0, \quad M_0 + M_1, \quad M_0 + M_1 + M_2, \quad \ldots$$

correspond $\dfrac{f(x)}{1-x}$.

Règle VI. — A la suite N_0, N_1, N_2, ..., où

$$N_n = (n+1)M_0 + nM_1 + (n-1)M_2 + \ldots + 2M_{n-1} + M_n,$$

correspond $\dfrac{f(x)}{(1-x)^2}$.

Règle VII. — A la suite $M_1 - M_0$, $M_2 - M_1$, $M_3 - M_2$, ... correspond

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} - f(x).$$

Règle VIII. — A la suite L_0, L_1, L_2, ..., où

$$L_n = \alpha_0 M_n + \alpha_1 M_{n-1} + \ldots + \alpha_p M_{n-p}$$

(α_0, α_1, ..., α_p étant des nombres fixes quelconques), correspond

$$\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x^p}\right) f(x).$$

Règle IX. — A la suite $M_0 \pm M'_0$, $M_1 \pm M'_1$, ... correspond

$$f(x) \pm f_1(x).$$

Règle X. — A la suite $M_0 M'_0$, $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, ... correspond, comme caractéristique, l'une ou l'autre des intégrales définies

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f_1\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right) f_1(\rho e^{ti})\, dt,$$

où ρ est une constante arbitraire de module plus petit que les rayons d'holomorphie des fonctions f et f_1 autour de $x = 0$ (*voir* § 5).

Règle XI. — A la suite M_0^2, M_1^2, M_2^2, ... correspond, comme

caractéristique,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f\left(\frac{x e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

laquelle se laisse écrire sous la forme réelle

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\sqrt{x}, t)^2\, dt,$$

où $\Psi(r, \varphi)$ désigne le module de $f(re^{\varphi i})$.

Règle XII. — A la suite limitée $M_0^p, M_1^p, \ldots, M_m^p$ (p étant un entier positif donné) correspond, comme caractéristique, le polynome $\mathfrak{J}_p(x)$ de degré m, défini par la formule de récurrence

$$(61)\qquad \begin{cases} \mathfrak{J}_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathfrak{J}_1(c_{k-1} e^{it_{k-1}})\, \mathfrak{J}_{k-1}\left(\frac{x e^{-it_{k-1}}}{c_{k-1}}\right) dt_{k-1} \\ (k = 2, 3, \ldots, p;\ c_i = \text{const.}) \end{cases}$$

avec

$$\mathfrak{J}_0(x) = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}, \qquad \mathfrak{J}_1(x) = f(x).$$

En effet, on trouve de proche en proche, en vertu du théorème cité au paragraphe 5,

$$\mathfrak{J}_2(x) = M_0^2 + M_1^2 x + \ldots + M_m^2 x^m,$$
$$\mathfrak{J}_3(x) = M_0^3 + M_1^3 x + \ldots + M_m^3 x^m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le polynome $\mathfrak{J}_p(x)$ s'exprime, d'ailleurs, explicitement sous la forme d'une intégrale multiple d'ordre $p - 1$,

$$(62)\qquad \mathfrak{J}_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}}\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F_{p-1}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{p-1},$$

où

$$F_{p-1} = f(c_1 e^{it_1}) f(c_2 e^{it_2}) \ldots f(c_{k-1} e^{it_{k-1}}) f\left(\frac{x e^{-i(t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1})}}{c_1 c_2 \ldots c_{k-1}}\right),$$

CHAPITRE IV.

LA CARACTÉRISTIQUE SPECTRALE QUALITATIVE

11. La fonction

$$\xi(x) = \theta_0 + \theta_1 g_1 x + \theta_2 g_2 x^2 + \ldots, \tag{73}$$

où θ_k est l'un des quatre nombres 1, -1, i, $-i$, désignée comme *caractéristique qualitative* du spectre considéré, ne dépend que des signes des parties réelles et imaginaires des éléments du spectre, et du rythme suivant lequel le spectre est formé. C'est une série de puissances à coefficients nombres *commensurables* de module égal à une puissance entière négative de 10.

Cette fonction se réduit, pour une suite M_k limitée, à un polynome à coefficients de module égal à une puissance entière négative de 10. Dans le cas de suites illimitées on peut démontrer le théorème suivant :

La caractéristique spectrale qualitative correspondant à un rythme continuellement accéléré suivant une loi quelconque est une fonction entière hypertranscendante de x, c'est-à-dire ne satisfaisant à aucune équation différentielle d'ordre fini

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0, \tag{74}$$

algébrique en x, y et les dérivées de y par rapport à x.

En effet, on a dans le cas d'un tel rythme

$$h_1 < h_2 < h_3 < \ldots$$

et, par suite,

$$h_k = h_{k-1} + l_k,$$

où l_k est un entier positif, variant ou non avec k, mais essentiellement différent de zéro. On a donc

$$h_k = h_1 + (l_1 + l_2 + \ldots + l_{k-1})$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P_k &= h_1 + h_2 + \ldots + h_k \\ &= kh_1 + [(k-1)l_1 + (k-2)l_2 + \ldots + 2l_{k-2} + l_{k-1}]. \end{aligned}$$

La fonction $\xi(x)$ est donc définie par une série

$$\xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

dont le coefficient général α_n est un nombre commensurable de la forme

$$(75) \qquad \alpha_n = \theta_n 10^{-nh_1 - [(n-1)l_1 + (n-2)l_2 + \ldots + l_{n-1}]}.$$

Les l_k étant tous différents de zéro, en désignant par l un entier fixe compris entre zéro et le plus petit des l_k (ou égal à celui-ci) on aura

$$(76) \qquad nh_1 + (n-1)l_1 + (n-2)l_2 + \ldots + l_{n-1} > nh_1 + \frac{n(n-1)}{2} l,$$

ce qui montre que la fonction $\xi(x)$ est bien une fonction *entière* de x.

Or, M. Pólya (¹) a démontré qu'une fonction *entière* définie par une série

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

à coefficients nombres *commensurables*, pour laquelle l'expression

$$(77) \qquad \frac{\log |a_n|}{n (\log n)^2}$$

ne reste pas finie lorsque n augmente indéfiniment, ne saurait jamais être une intégrale d'une équation (74).

En vertu de l'inégalité

$$(78) \qquad |\alpha_n| < 10^{-nh_1 - \frac{n(n-1)}{2} l},$$

on a

$$\log |\alpha_n| < -\left[nh_1 - \frac{n(n-1)}{2} l\right],$$

(¹) G. PÓLYA, *Über das Anwachsen von ganzen Funktionen die einer Differentialgleichung genügen* (*Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich*. Jahrg. 61, 1916, p. 531-545).

de sorte que l'expression (77) de M. Pólya, relative à la fonction $\xi(x)$, est plus grande en valeur absolue que

$$\frac{h_1 + \frac{n-1}{2} l}{(\log n)^2}$$

et, par suite, tend vers $-\infty$ lorsque n augmente indéfiniment, ce qui démontre le théorème.

Il est manifeste que le théorème subsiste encore si l'accélération du rythme h_k, au lieu d'être continuelle dès le premier terme h_1, ne le serait qu'à partir d'un certain rang $k > 1$.

Grâce à l'inégalité (78), les procédés usuels de la théorie générale des fonctions entières, et plus particulièrement les méthodes de M. Hadamard, se prêtent aisément à l'étude de diverses particularités de la fonction $\xi(x)$ (mode de croissance, densité de zéros, limites de variation pour les intervalles donnés de x, etc.).

Dans le cas d'un rythme *uniformément accéléré* $h_k = h + ck$ la caractéristique spectrale qualitative est la fonction entière

$$\xi(x) = \chi(\beta x),$$

où $\chi(x)$ est la transcendante

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n q^{n^2} x^n, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}$$

et β la constante $10^{-h-\frac{c}{2}}$. Cette dernière fonction, dans le cas où les signes des parties réelles et imaginaires sont les mêmes pour tous les termes de la suite M_k, se réduit à la transcendante bien connue de la théorie des fonctions elliptiques

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} x^n.$$

Comme on sait [1], c'est une fonction entière *du genre zéro*, ainsi que ses combinaisons linéaires avec des polynomes. Les zéros de $\theta(x)$ croissent avec leur rang au moins aussi vite que $10^{\frac{cn}{2}}$,

---

(1) J. Hadamard. *Études sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, p. 210.

et il en est de même pour les zéros de l'équation $\theta(x) = R(x)$, où R est une fonction rationnelle quelconque. Le module de $\theta(x)$ augmente, pour x positif indéfiniment croissant, indéfiniment moins vite que la fonction

$$e^{\frac{(\log x)^2}{c}};$$

la théorie des fonctions elliptiques conduit même à l'inégalité plus précise

$$|\theta(x)| < A e^{\frac{(\log x)^2}{2c}},$$

où A est une constante positive ([1]).

Or, le rythme uniformément accéléré étant compatible avec la suite de coefficients de toute série de puissances à coefficients entiers et à rayon de convergence non nul, on voit que la transcendante $\theta(x)$ intervient comme caractéristique spectrale qualitative dans la formation des spectres des coefficients de toute série de Taylor convergente, à coefficients nombres entiers réels positifs, ou entiers négatifs, ou entiers alternativement positifs ou négatifs, ainsi qu'en d'autres cas où il y aurait une régularité de signes des coefficients. La transcendante $\chi(x)$ intervient, d'ailleurs, quels que soient ces coefficients entiers, réels ou imaginaires, et quels que soient les signes de leurs parties réelles et imaginaires.

Les coefficients des puissances de x dans $\chi(qx)$ et $\theta(qx)$ étant des nombres commensurables, ces deux fonctions satisfont bien aux conditions du théorème de M. Pólya et sont, par conséquent, des fonctions hypertranscendantes.

Dans le cas de rythme *à accélération croissante*, la caractéristique spectrale qualitative $\xi(x)$, toujours fonction entière hypertranscendante, est une série de puissances à coefficients décroissant au moins aussi vite que ceux de la fonction $\theta(x)$. Pour un rythme *à accélération d'ordre p constante*, la série $\xi(x)$ a pour coefficient général

$$\alpha_n = 10^{-P(n)}\theta_n,$$

([1]) J. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 179 et 202.

où $P(n)$ est un polynome de degré $p+1$ en n prenant une valeur positive commensurable pour toute valeur entière positive de n.

On sait que la transcendante $\theta(x)$, correspondant au cas de $p=1$, est étroitement liée aux fonctions Θ de la théorie des fonctions elliptiques : les fonctions Θ proprement dites sont des séries exponentielles dont l'exposant est un polynome *du second degré* par rapport au rang du terme, la circonstance qui établit, par exemple, le rapport connu entre la théorie de ces fonctions et la théorie arithmétique des formes quadratiques.

D'une manière analogue, les transcendantes $\xi(x)$ correspondant à $p=2, 3, 4, \ldots$ sont liées aux fonctions Θ de degré supérieur, définies par des séries exponentielles dont l'exposant est d'*un degré supérieur à* 2 par rapport au rang du terme. Ces fonctions ont été l'objet des recherches importantes de M. Appell (1).

---

(1) P. Appell, *Sur les fonctions* Θ *de degrés supérieurs* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 153, 1911, p. 584-587 et 617-618).

CHAPITRE V.

LA CORRESPONDANCE ENTRE UNE SUITE D'ENTIERS ET LES ÉLÉMENTS DE SES SPECTRES.

12. Il sera entendu dans ce qui suit que, comme d'habitude, on comptera les rangs de chiffres composant la partie entière d'un nombre, de la droite vers la gauche, et les rangs des décimales, ainsi que les rangs des termes d'une suite, de la gauche vers la droite.

Le rythme spectral h_k étant donné, la correspondance entre une suite d'entiers et les éléments du spectre, ainsi que la correspondance entre la caractéristique spectrale principale et le spectre lui-même, peuvent se résumer en les règles suivantes :

Règle I. — Lorsque l'on connaît la caractéristique principale sous la forme

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots$$

à coefficients M_k numériquement connus, on formera pour chaque entier M_k son groupe numérique G_k, et à l'aide de ces groupes on écrira le nombre

$$S = G_0, G_1 G_2 G_3 \ldots;$$

ce nombre représentera le spectre des M_k à rythme h_k suivant lequel les groupes G_k ont été formés.

Ainsi, pour la caractéristique

$$f(x) = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} x + \binom{12}{2} x^2 + \ldots + \binom{12}{6} x^6$$

et le rythme uniformément croissant $h_k = 1 + k$, on aura

$$G_0 = 1, \qquad G_1 = 12, \qquad G_2 = 066, \qquad G_3 = 0220,$$
$$G_4 = 00495, \qquad G_5 = 000792, \qquad G_6 = 0000924,$$

et le spectre sera

$$S = 1{,}120660220004950007920000924.$$

Règle II. — Lorsque l'on connait la caractéristique principale du spectre sous une forme quelconque ne supposant pas connaissance des valeurs numériques des coefficients M_k, on formera le spectre des M_k à l'aide de la génératrice spectrale $\Phi(x)$: le spectre coïncidera avec la valeur $S = \Phi(1)$ et une suite limitée de ses décimales fournira un segment déterminé du spectre.

Ainsi, pour la caractéristique

$$f(x) = (1 + x)^9$$

de 10 coefficients binomes $\binom{9}{k}$ et pour le rythme uniforme $h = 3$ on aura

$$\Phi(x) = \frac{(1000 + x)^9}{10^{27}}$$

et le spectre de ces coefficients sera

$$S = \frac{1001^9}{10^{27}} = 1{,}009036084126126084036009001.$$

Règle III. — La cannelure spectrale correspondant au terme M_0 coïncide avec la partie entière de la valeur numérique de $\Phi(1)$; la cannelure correspondant au terme M_k coïncide avec le groupe de chiffres significatifs de $\Phi(1)$ commençant par la

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_{k-1} + 1)^{\text{ième}}$$

et se terminant par la $(h_1 + h_2 + \ldots + h_k)^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(1)$; la $n^{\text{ième}}$ raie (comptée de la droite vers la gauche) de la cannelure correspondant au terme M_k coïncide avec la

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_k - n + 1)^{\text{ième}} \text{ décimale}$$

de $\Phi(1)$.

Dans le cas de rythme uniforme $h_k = h$, la cannelure correspondant à M_k coïncide avec le groupe de chiffres significatifs de $\Phi(1)$ commençant par la $[(k - 1)h + 1]^{\text{ième}}$ et terminée par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(1)$; la $n^{\text{ième}}$ raie de cette cannelure est fournie par la $(kh - n + 1)^{\text{ième}}$ décimale.

Dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$,

cette cannelure commence par la $\left[\frac{k(k-1)}{2}c+(k-1)h+1\right]^{\text{ième}}$ et se termine par la $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+kh\right]^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(1)$; sa $n^{\text{ième}}$ raie coïncide avec la $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+kh-n+1\right]^{\text{ième}}$ décimale.

Ainsi, dans l'exemple de la règle II, la quatrième cannelure est fournie par le groupe de chiffres significatifs de S commençant par la dixième et terminée par la douzième décimale : c'est donc 126. La deuxième raie de la sixième cannelure est fournie par la dix-septième décimale de S : c'est donc 8.

Règle IV. — Considérons dans la suite naturelle d'entiers positifs les intervalles numériques $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, l'intervalle Y_k étant celui qui commence par l'entier $h_1+h_2+\ldots+h_{k-1}+1$ et se termine par l'entier $h_1+h_2+\ldots+h_k$; la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre $S=\Phi(1)$ est égale au $(h_1+h_2+\ldots+h_k-n+1)^{\text{ième}}$ chiffre du groupe numérique G_k ayant pour l'indice k l'indice de l'intervalle Y contenant l'entier n.

Dans le cas de rythme uniforme $h_k=h$, l'intervalle Y_k est celui commençant par l'entier $(k-1)h+1$ et se terminant par l'entier kh; la $n^{\text{ième}}$ décimale de S coïncide avec le $(kh-n+1)^{\text{ième}}$ chiffre du groupe G ayant pour l'indice celui de l'intervalle Y contenant n.

Dans le cas de rythme uniformément accéléré, l'intervalle Y_k est celui commençant par l'entier $\left[\frac{k(k-1)}{2}c+(k-1)h+1\right]$ et se terminant par l'entier $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+kh\right]$; la $n^{\text{ième}}$ décimale de S coïncide avec le $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+k-n+1\right]^{\text{ième}}$ chiffre du groupe G_k correspondant. Pour le rythme, par exemple $h_k=ck$, l'intervalle Y_1 est celui commençant par 1 et finissant par c; Y_2 commence par $c+1$ et se termine par $3c$; Y_3 commence par $3c+1$ et se termine par $6c$; Y_4 commence par $6c+1$ et se termine par $10c$, etc.

Règle V. — Les $k+1$ premiers coefficients de la caractéristique spectrale principale $f(x)$ déterminent complètement la partie entière et la suite de $P_k=h_1+h_2+\ldots+h_k$ prémières décimales du nombre S : cette partie décimale s'obtient en écri

vant bout à bout, à la suite les uns des autres, les k groupes numériques correspondants $G_1 G_2 \ldots G_k$.

Dans le cas de rythme uniforme $h_k = h$, les $k+1$ premiers coefficients de $f(x)$ déterminent la partie entière et les kh premières décimales de S.

Dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, ils en déterminent la partie entière et les $\frac{k(k+1)}{2}c + hk$ premières décimales.

Règle VI. — La partie entière et la suite de P_k premières décimales du nombre S déterminent complètement les $k+1$ premiers coefficients de la caractéristique $f(x)$.

Si l'on partage la suite s_k de ces décimales en tranches consécutives composées, la première de h_1 premières décimales, la deuxième de h_2 décimales suivantes, etc., le coefficient M_p de $f(x)$ (abstraction faite des signes de sa partie réelle et imaginaire) coïncide avec le groupe de chiffres significatifs de la $p^{\text{ième}}$ tranche. Autrement dit : ce coefficient est représenté par la cannelure de la tranche spectrale commençant par la $(h_1 + h_2 + \ldots + h_{p-1} + 1)^{\text{ième}}$ et finissant par la $(h_1 + h_2 + \ldots + h_p)^{\text{ième}}$ décimale du nombre S.

13. Pour qu'on puisse, d'après un nombre S *donné* comme spectre d'une suite *inconnue* d'entiers $M_0, M_1, M_2, \ldots$, reconstituer cette suite même, il faut et il suffit que l'on connaisse, en plus, un ensemble (D) de *données qualitatives* qui s'y rattachent et qui permettent de préciser :

1° La loi de rythme spectral h_k;

2° L'ensemble σ_k de signes des parties réelles et des coefficients de i des parties imaginaires des entiers M_k.

La loi h_k de rythme fera connaître, à l'aide de la règle III du paragraphe précédent, les cannelures successives du spectre S, et par cela même les entiers $N_0, N_1, N_2, \ldots$ liés aux M_k par la relation

$$N_k = \theta_k M_k,$$

où θ_k est celui des quatre nombres $1, -1, i, -i$ qui, d'après les signes correspondants σ_k, convient à M_k; les M_k seront alors complètement déterminés par cette dernière relation.

CHAPITRE VI.

LE SPECTRE EN TANT QUE NOMBRE DÉCIMAL.

14. Il est manifeste qu'un spectre, fourni par une caractéristique $f(x)$, ne saurait être un nombre *entier* (réel ou imaginaire) sans que $f(x)$ se réduise à une constante; il ne saurait avoir *un nombre limité de décimales* que si $f(x)$ se réduit à un polynome en x.

Il est de même évident que pour une caractéristique $f(x)$, fonction *rationnelle* de x, le spectre ayant un *rythme uniforme* quelconque compatible avec ses éléments est un nombre *commensurable* et représente, par conséquent, une fraction décimale périodique, simple ou mixte. Toutes les fois que $f(x)$ est une fonction *algébrique* en x, le spectre ayant un tel rythme est un nombre *algébrique*.

Mais il n'en est pas nécessairement ainsi lorsque le rythme spectral n'est pas uniforme : *un spectre, ayant un rythme suffisamment accéléré pour que sa dispersion croisse assez rapidement avec le rang des tranches spectrales, est un nombre transcendant.*

Rappelons, en effet, un théorème connu de la théorie des nombres transcendants et dû à M. Maillet [1] :

Soient b un entier fixe quelconque; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ des entiers réels positifs ou négatifs, plus petits que b en valeur absolue et dont une infinité est différente de zéro; $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ des entiers réels positifs tels que

$$1 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 \leqq \psi_3 \leqq \ldots$$

et ψ_n croissant indéfiniment avec n. La fonction

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

[1] E. MAILLET, *Introduction à la théorie des nombres transcendants* (Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 20-22).

où

$$A_n = \frac{m_n}{b^{\psi_1\psi_2\cdots\psi_n}},$$

est une fonction entière de x ne prenant pour $x =$ nombre commensurable (et même algébrique), différent de zéro, que des valeurs qui sont des nombres transcendants.

Considérons donc une suite indéfinie $M_0, M_1, M_2, \ldots$ d'entiers *ayant chacun au plus l chiffres*, et prenons dans le théorème précédent

$$m_k = \theta_k M_k, \qquad b = 10^l.$$

La fonction $\varphi(x)$ coïncidera avec la génératrice spectrale de la suite M_k correspondant au rythme (compatible avec la suite)

$$h_k = u_k - u_{k-1} \qquad \text{où} \qquad u_k = \psi_1\psi_2\ldots\psi_k l$$

avec $h_1 = \psi_1$, car on a alors

$$A_n = \frac{\theta_n M_n}{10^{l u_k}} = \frac{\theta_n M_n}{10^{h_1+h_2+\ldots+h_n}} = \theta_n g_n M_n.$$

Le spectre des M_k à rythme h_k coïncidera donc avec la valeur $\varphi(1)$ et par suite *représentera un nombre transcendant*. D'après la théorie des nombres transcendants, cette transcendance provient de la présence d'une infinité de suites de zéros séparant les décimales significatives du spectre et dont l'étendue croît indéfiniment avec le rang de la suite. Autrement dit : *la transcendance du spectre provient de la croissance rapide de sa dispersion avec le rang des tranches spectrales.*

Pour la suite M_k se composant d'entiers à un seul chiffre, le spectre ayant, par exemple, le rythme $h_k = (k-1)(k-1)!$ est un nombre transcendant.

Mais le caractère transcendant ne se rattache pas exclusivement aux spectres des suites d'entiers à un nombre limité de chiffres. On peut le faire voir à l'aide d'un autre théorème sur les nombres transcendants, dû également à M. Maillet [1] et qui est le suivant :

Soit b un entier fixe quelconque et posons

$$b_{k,n} = b^{b^n_{k-1}} \qquad \text{avec} \qquad b_{1,n} = b^n,$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 105.

de sorte que

$$b_{2,n} = b^{b^n}, \qquad b_{3,n} = b^{b^{b^n}}, \qquad \ldots$$

Soient ensuite ρ et τ deux entiers réels positifs fixes, et A_0, A_1, A_2, ... une suite d'entiers (réels ou imaginaires, positifs ou négatifs) tels que pour une valeur déterminée de p plus grande que 2 on ait pour tout indice n

$$|A_n| \leqq b^{\tau}_{p,n}.$$

D'après le théorème que nous avons en vue, la série

$$\varphi(x) = A_0\omega_0 + A_1\omega_1 x + A_2\omega_2 x^2 + \ldots,$$

où

$$\omega_n = b^{-\rho n}_{p,n},$$

représente une fonction entière de x ne prenant pour x rationnel différent de zéro que des valeurs transcendantes.

Considérons alors une suite indéfinie d'entiers réels ou imaginaires M_0, M_1, M_2, ... dont le nombre de chiffres peut augmenter aussi rapidement qu'on le veut avec leur rang, et déterminons deux entiers positifs $p > 2$ et τ de telle manière que le nombre $10_{p-1,n}$ croisse au moins aussi vite que le nombre de chiffres de M_n, et que pour tout indice n on ait

$$|M_n| \leqq 10^{\tau}_{p,n}.$$

En prenant dans le théorème précédent

$$A_n = \theta_n M_n, \qquad b = 10,$$

la fonction $\varphi(x)$ coïncidera avec la génératrice spectrale de la suite M_k correspondant au rythme

$$h_k = u_k - u_{k-1} \qquad \text{où} \qquad u_n = 10^{\rho n}_{p,n}$$

avec $h_1 = 10_{p,1}$, car on a alors

$$A_n\omega_n = \frac{\theta_n M_n}{10^{h_1+h_2+\ldots+h_n}} = \theta_n g_n M_n.$$

Comme la valeur $\varphi(1)$ représente le spectre des M_k à rythme h_k, le spectre sera un nombre transcendant.

La transcendance des spectres ainsi formés est due essen-

tiellement à la dispersion du spectre, l'effet de l'accélération rapide du rythme spectral; elle ne se rattache nullement aux valeurs numériques mêmes des entiers formant les cannelures du spectre ou à leur mode de croissance avec le rang.

Mais à côté de tels spectres, rentrant dans la classe de *nombres transcendants de Liouville*, il y en a une infinité d'autres, représentant aussi des nombres transcendants, tout en ayant une dispersion faible ou même nulle, et un rythme lent ou même uniforme. Il suffit de rappeler le spectre, à un rythme uniforme, quelconque, de la suite d'entiers à un chiffre coïncidant avec les décimales successives du nombre e ou du nombre π, et qui n'appartient pas à la classe de Liouville.

La transcendance d'un spectre peut donc être due : 1° à sa dispersion seule; 2° à la composition des cannelures spectrales; 3° à la fois à sa dispersion et à la composition de ses cannelures.

DEUXIÈME PARTIE.

UN MODE DE CORRESPONDANCE ENTRE LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE ET LES SUITES DE NOMBRES ENTIERS.

I. — Transformations $\Delta[f]$ et fonctions (E).

15. Parmi les diverses manières possibles d'établir une correspondance entre une fonction $f(z)$ d'une variable et une suite de nombres entiers, l'une consisterait à établir une correspondance entre la fonction $f(z)$ et une série de puissances

$$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots \tag{80}$$

à coefficients M_k *nombres entiers*, de sorte que de deux correspondants $f(z)$ et la suite M_k l'un se trouve déterminé quand on se donne l'autre.

Nous appellerons, pour abréger le langage, *séries* (E) les séries de puissances à coefficients nombres entiers ayant le rayon de convergence non nul. Les fonctions d'une variable, susceptibles d'être représentées par de telles séries, seront appelées *fonctions* (E). Les polynomes à coefficients nombres entiers seront désignés comme *polynomes* (E).

Parmi les divers moyens de réaliser *effectivement* une correspondance entre les $f(z)$ et les séries (E), l'un consisterait *à transformer*, par un ensemble connu d'opérations, $f(z)$ en une série (E), la transformation effectuée établissant une correspondance définie réciproque entre les éléments déterminants de $f(z)$ et la suite de coefficients de la série (E).

Nous désignerons comme une *transformation* $\Delta[f]$ *compatible avec la fonction considérée* $f(z)$ toute transformation se traduisant par un ensemble limité ou illimité d'opérations déterminées, laquelle, effectuée sur $f(z)$, remplit ces conditions.

La transformation, par exemple

$$\Delta[f] = f(-i \log z),$$

est compatible avec la fonction

$$f(z) = \frac{e^{zi}}{(1 - e^{zi})^2}$$

qu'elle transforme en série (E)

$$z - 2z^2 - 3iz^3 + 4z^4 + \ldots;$$

la transformation

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\, dt$$

est compatible avec $f(z) = e^{mz}$ (m = nombre entier) qu'elle transforme en série (E)

$$1 + mz + m^2 z^2 + m^3 z^3 + \ldots;$$

la transformation

$$\Delta[f] = z^2 f''(z) + 2z f'(z)$$

est compatible avec toute fonction $f(z)$ définie par une série de puissances de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{M_n}{n(n+1)} z^n$$

(les M_n étant des entiers fixes ou variables avec n) qu'elle transforme en série

$$M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots;$$

la transformation

$$\Delta(f) = \gamma_1 f(\gamma_2 z),$$

où γ_1 et γ_2 sont deux nombres entiers convenablement déterminés, est compatible avec toute fonction *algébrique* développable en série de puissances de z à coefficients nombres *commensurables*, etc.

II. — Transformations $\Delta[f]$ se rattachant aux catégories déterminées de fonctions.

16. Les opérations par lesquelles s'effectue une transformation $\Delta[f]$ sont infiniment variées même pour une fonction particu-

lière $f(z)$. Néanmoins, une transformation particulière $\Delta[f]$ ne se rattache pas exclusivement à une fonction particulière : d'une manière générale *une transformation* $\Delta[f]$ *est compatible avec une catégorie plus ou moins générale de fonctions.*

Ainsi, la fonction étant définie, dans une partie de son domaine d'existence par un développement

$$f(z) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots \tag{81}$$

(où l'on peut, par un changement de variable indépendante, faisant partie de $\Delta[f]$, substituer z à u), on a les règles suivantes :

Règle I. — Une transformation de la forme

$$\Delta[f] = A f(Bz) \qquad (A = \text{const.}; \quad B = \text{const.})$$

est compatible avec $f(z)$ toutes les fois que l'*une* des conditions suivantes est remplie :

1° a_n a un nombre *fini* de décimales; on peut alors prendre $B = 1$, $A = 10^g$, où g est l'entier positif représentant une limite supérieure du nombre de décimales des a_n.

2° a_n est le quotient de deux nombres entiers premiers entre eux, dont le dénominateur β_n ne contient que des facteurs premiers n'augmentant pas indéfiniment avec n, et satisfait à la condition que $\sqrt[n]{|\beta_n|}$ reste fini lorsque n augmente indéfiniment.

Le développement de β_n en facteurs premiers ne comprenant qu'un nombre limité de facteurs $p_1, p_2, \ldots, p_h$, si l'on désigne par N un nombre fixe tel que $\sqrt[n]{|\beta_n|} < N$, on peut, pour chaque facteur p_i, déterminer un entier λ_i tel que $p_i^{\lambda_i} > N$ et l'on peut prendre

$$B = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_h^{\lambda_h}.$$

3° a_n est un nombre *commensurable* et $f(z)$ une fonction *algébrique* (cas particulier de 2° d'après le théorème d'Eisenstein).

4° a_n est une fraction décimale *périodique* dont le nombre α de chiffres de la partie non périodique et le nombre β de chiffres de la période ne varient pas avec n; on peut alors prendre

$$B = 1, \qquad A = 10^{\beta} 9_{\alpha}, \qquad 9_{\alpha} = \overbrace{99\ldots9}^{\alpha}$$

(conséquence de la proposition arithmétique élémentaire sur les fractions décimales périodiques converties en fractions ordinaires).

Règle II. — Toutes les fois que a_n est la $p^{ième}$ racine d'un nombre entier (p = entier positif), la fonction $f(z)$ admet la transformation

$$\Delta[f] = \mathfrak{I}_p(z), \tag{84}$$

où $\mathfrak{I}_k(z)$ est la fonction de z définie par la formule de récurrence (61) avec

$$\mathfrak{I}_0(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad \mathfrak{I}_1(z) = f(z)$$

[et avec les restrictions évidentes que comporte la formule (61) pour les suites M_k illimitées].

Règle III. — Dans le cas plus particulier où a_n est la racine carrée d'un nombre entier, la fonction $f(z)$ admet la transformation

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f\left(\frac{ze^{-ti}}{\rho}\right) dt \qquad (\rho = \text{const.}) \tag{85}$$

(*voir* § 5).

Règle IV. — Tout polynome $f(z)$ à coefficients nombres *algébriques* admet une transformation $\Delta[f]$ s'effectuant par un nombre fini d'opérations algébriques et de substitutions.

Règle V. — Lorsque a_n est de la forme $M_n\varphi_n$ où M_n est un entier fixe ou variable avec n, et φ_n un facteur non entier variant avec n et tel que la série

$$\varphi(z) = \frac{1}{\varphi_0} + \frac{z}{\varphi_1} + \frac{z^2}{\varphi_2} + \ldots$$

ait son rayon de convergence non nul, la fonction $f(z)$ admet la transformation

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ce^{ti})\,\varphi\left(\frac{ze^{-ti}}{c}\right) dt \qquad (c = \text{const.}) \tag{87}$$

ainsi que celle qu'on obtient en y permutant f et φ (conséquence du théorème cité au paragraphe 5).

D'ailleurs, dans une multitude de cas de cette espèce, la fonction $f(z)$ admet aussi d'autres transformations $\Delta[f]$ qui peuvent affecter les formes très variées. Ainsi :

1° Pour $a_n = \mathrm{M}^{\frac{n^2}{2}}$ (où M est un entier fixe) qu'on peut écrire

$$a_n = \mathrm{M}_n \varphi_n, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{M}_n = \mathrm{M}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad \varphi_n = \mathrm{M}^{-\frac{n}{2}},$$

on a, dans le cas où $f(z)$ est un polynome,

(88) $$\Delta[f] = f(z\sqrt{\mathrm{M}}) \qquad \text{et} \qquad \Delta[f] = f\left(\frac{z}{\sqrt{\mathrm{M}}}\right);$$

2° Pour $\varphi_n = \frac{1}{\alpha + \beta n}$ (où α et β sont des constantes), une transformation $\Delta[f]$ est fournie par l'expression

(89) $$z^{1-\beta} \frac{d}{dz}[z^\beta f(z^\alpha)],$$

après qu'on y remplace z par $z^{\frac{1}{\alpha}}$;

3° Pour $\varphi_n = n^{-p}$ (où p est un entier positif fixe), on a

(90) $$\Delta[f] = \lambda_p(z),$$

où les $\lambda_k(z)$ sont les fonctions définies par la formule de récurrence

$$\lambda_k(z) = z\frac{d\lambda_{k-1}(z)}{dz}, \qquad \lambda_1(z) = zf'(z);$$

4° Pour

$$\varphi_n = \frac{1}{m(n+1)\dots(n+p)},$$

on a

(91) $$\Delta[f] = \frac{1}{z^{p-1}} \frac{d}{dz} \mu_p(z),$$

où les $\mu_k(z)$ sont les fonctions définies par la formule de récurrence

$$\mu_k(z) = z^2 \frac{d\mu_{k-1}}{dz}, \qquad \mu_1(z) = z^2 f'(z).$$

Règle VI. — Lorsque, φ_n étant le facteur de la règle VIII, son inverse $\frac{1}{\varphi_n}$ s'exprime par une intégrale définie de la forme

$$\int_a^b uv^n \, dt$$

(u et v fonctions de t), la fonction $f(z)$ admet la transformation

$$(92)\qquad \Delta[f] = \int_a^b u f(vz)\,dt.$$

Ainsi, pour $\varphi_n = (\alpha + \beta n)^\lambda$, ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $|\lambda| > 1$, la formule

$$\frac{1}{n^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-nt}\,dt$$

fournit

$$(93)\qquad \Delta[f] = \frac{e^{-\alpha}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} f(ze^{-\beta t})\,dt;$$

pour $\varphi_n = \dfrac{1}{1.2.3\ldots n}$, la formule

$$(95)\qquad 1.2.3\ldots n = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$$

fournit

$$(96)\qquad \Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\,dt.$$

Cette dernière transformation est, par exemple, compatible avec toute fonction $f(z)$ de la forme

$$e^{\varphi(z)},\quad \sin^m \varphi(z),\quad \cos^m \varphi(z),\quad e^{mx}\varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est une fonction (E) et m un entier positif.

Règle VII. — Lorsque le facteur φ_n de la règle VIII est de la forme

$$\varphi_n = \frac{1}{(1.2.3\ldots n)^p} \qquad (p = \text{entier positif fixe}),$$

la fonction $f(z)$ admet la transformation (avec les restrictions de convergence)

$$(97)\quad \Delta[f] = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-(t_1+t_2+\ldots+t_p)} f(zt_1t_2\ldots t_p)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_p$$

[conséquence de la formule (95)]. Tel est, par exemple, le cas de la transcendante de Bessel

$$f(z) = \frac{x}{(1)^2} - \frac{2x^2}{(1.2)^2} + \frac{3x^3}{(1.2.3)^2} + \ldots$$

correspondant à $p = 2$.

17. Les règles suivantes facilitent la recherche d'une pareille transformation $\Delta[f]$ dans une multitude de cas.

Règle VIII. — Soit $\omega(z)$ une fonction de z définie par les $p+1$ relations

$$(98)\qquad \omega(z) = \omega_1(u_1), \quad u_1 = \omega_2(u_2), \quad \ldots, \quad u_{p-1} = \omega_p(u_p), \quad u_p = z,$$

où les fonctions ω_k sont données; soit $\delta_k[f]$ une opération quelconque, laquelle, effectuée sur une série de puissances *arbitraire* d'une catégorie (f) de séries

$$(99)\qquad f = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2,$$

transforme celle-ci formellement en une série

$$\omega_k(\lambda_0) + \omega_k(\lambda_1) z + \omega_k(\lambda)_2 z^2 + \ldots.$$

Toutes les fois qu'il sera possible de choisir la fonction $\omega(z)$ de manière que la série

$$\omega(a_0) + \omega(a_1) z + \omega(a_2) z^2 + \ldots$$

soit une série (E), la fonction $f(z)$, appartenant à la catégorie (f), admettra comme transformation $\Delta[f]$ celle qui s'obtient par la superposition des opérations $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, effectuées sur $f(z)$, dans l'ordre

$$(100)\qquad \Delta[f] = \delta_p \delta_{p-1} \ldots \delta_1[f].$$

Règle IX. — Soit $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ une suite de termes variant avec n, dont chacun s'exprime comme produit de p facteurs,

$$\rho_n = \rho_{n1} \rho_{n2} \ldots \rho_{np}$$

(p ne variant pas avec n); soit $\delta_k[f]$ une opération quelconque, laquelle, effectuée sur une série (99) arbitraire de la catégorie (f), transforme celle-ci formellement en une série

$$\rho_{0k}\lambda_0 + \rho_{1k}\lambda_1 z + \rho_{2k}\lambda_2 z^2 + \ldots.$$

Toutes les fois qu'il sera possible de choisir la suite ρ_k de manière que la série

$$\rho_0 a_0 + \rho_1 a_1 z + \rho_2 a_2 z^2 + \ldots$$

soit une série (E), la fonction $f(z)$ admettra comme transformation $\Delta[f]$ celle qui s'obtient par la superposition des opérations $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ effectuées sur $f(z)$ dans un ordre arbitraire.

Par exemple, pour un polynome $f(z)$ ayant son coefficient général de la forme

$$a_n = \frac{M^{\frac{n^2}{2}}}{n} \qquad (M = \text{entier fixe}),$$

on aura

$$\rho_n = \rho_{n1}\rho_{n2}, \qquad \rho_{n1} = M^{\frac{n}{2}}, \qquad \rho_n = n.$$

Au premier facteur correspond

$$\delta_1[f] = f(z\sqrt{M}),$$

et au deuxième

$$\delta_2[f] = zf'(z);$$

le polynome $f(z)$ admet donc la transformation

$$\Delta[f] = zf'(z\sqrt{M})\sqrt{M}.$$

Il est, d'ailleurs, évident qu'à l'aide d'une transformation $\Delta[f]$, compatible avec une fonction donnée, on peut former *une infinité* d'autres par des opérations, lesquelles, effectuées sur le résultat de $\Delta[f]$, transforment celui-ci en une nouvelle série (E) [addition d'une série (E) arbitraire; multiplication par une telle série; dérivation répétée un nombre arbitraire de fois; opération $\psi(\Delta[f])$ où ψ est une série (E) arbitraire, etc.]

III. — Quelques modes généraux de correspondance entre les fonctions d'une variable et les suites de nombres entiers.

18. Étant donnée une fonction $f(z)$, il est possible de lui faire correspondre une fonction (E) contenant tous les éléments pour la détermination complète de certaines particularités déterminées (singularités, zéros, etc.) de $f(z)$ dans un cercle donné du plan des z. On aura ainsi réalisé une correspondance entre les telles particularités (qui sont souvent ce qu'il importe le plus de connaître d'une fonction) et une suite de nombres entiers.

Ainsi, soient $z = \alpha$ un point ordinaire de $f(z)$ et

(101) $$f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots,$$

son développement au voisinage de ce point. Soit λ un nombre réel positif arbitraire et formons la fonction

$$(102) \qquad f_1(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots,$$

où M_n désigne la partie entière du nombre $a_n \lambda^n$ (réel ou imaginaire). La différence

$$(103) \qquad f(\alpha + \lambda z) - f_1(z)$$

est la fonction

$$V(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots,$$

où α_n est le nombre ayant pour partie entière zéro et pour partie décimale celle de $a_n \lambda^n$. La fonction $V(z)$ est holomorphe dans un cercle ayant l'origine comme centre et le rayon *supérieur* ou *égal* à 1. Il s'ensuit que les deux fonctions $f(\alpha + \lambda z)$ et $f_1(z)$ ont mêmes singularités dans un cercle quelconque C_0 ayant l'origine comme centre et le rayon ρ *inférieur* à 1.

D'autre part, les singularités $z = x_i$ de $f(\alpha + \lambda z)$ à l'intérieur de C_0 sont les valeurs $\frac{z_i - \alpha}{\lambda}$ où les z_i sont les affixes des singularités de $f(z)$ à l'intérieur du cercle C_α ayant $z = \alpha$ comme centre et le rayon $r = \lambda\rho$. D'où le fait suivant déjà signalé par M. Borel [1] :

On peut, pour la détermination des singularités de $f(z)$ à l'intérieur d'un cercle quelconque décrit autour d'un point ordinaire de $f(z)$ comme centre, substituer à $f(z)$ la fonction (E) définie par la série (102).

On a ainsi une correspondance entre $f(z)$ et une suite de nombres entiers contenant tous les éléments pour la détermination complète des singularités de $f(z)$ dans un cercle donné ayant pour centre un point ordinaire de la fonction.

Les zéros de $f(z)$ à l'intérieur du cercle C_α, tracé dans une région D du plan des z où la fonction est méromorphe, coïncident avec les pôles, compris dans C_α, de la fonction

$$\frac{1}{f} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

---

(1) E. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, p. 35-36.

où, d'après la formule connue, on a

$$A_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & . & . & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & \dots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & . & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Par conséquent : *la fonction* (102), *quand on y substitue les* A_n *aux* a_n, *établit une correspondance entre* $f(z)$ *et une suite de nombres entiers contenant tous les éléments pour la détermination complète des zéros de* $f(z)$ *compris dans un cercle* C_α.

Le même procédé, appliqué à d'autres combinaisons de f, établirait une telle correspondance entre $f(z)$ et les suites de nombres entiers déterminant les valeurs de z pour lesquelles $f(z)$ prend une valeur donnée, atteint ses maxima et minima, etc.

19. Il est possible, et de diverses manières, de substituer à $f(z)$ une fonction $f_1(z)$ qui, dans un cercle C_α, diffère aussi peu qu'on veut de $f(z)$ et pour laquelle se laisse établir une correspondance entre la fonction et une suite de nombres entiers.

Ainsi, en désignant par $f_1(z)$ la fonction définie au voisinage de $z = 0$ par la série

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

dont le coefficient b_n est égal au nombre $a_n \lambda^n$ du paragraphe précédent après avoir négligé dans celui-ci toutes les décimales qui suivent la $g^{\text{ième}}$ décimale, la différence $f(\alpha + \lambda z) - f_1(z)$ est une fonction dont le module, pour z compris dans le cercle C_0, reste constamment plus petit que

$$\frac{10^{-g}}{|1 - z|}.$$

Pour les z compris à l'intérieur du cercle C_α ayant le point $z = \alpha$ comme centre et plus petit que le cercle d'holomorphie de $f(z)$ autour de $z = \alpha$, cette fonction diffère de $f_1(z)$ d'une quantité dont le module est plus petit que le nombre

$$\frac{10^{-g}\lambda}{|\alpha + \lambda - z|},$$

qu'on peut, en disposant de g, rendre plus petit qu'un nombre donné ε.

Or, la fonction $f_1(z)$ admet la transformation

$$\Delta[f_1] = 10^g f_1(z)$$

établissant ainsi la correspondance entre la suite d'entiers (formés de chiffres composant la partie entière et les g premières décimales des nombres $a_n\lambda^n$) et une fonction qui, dans un cercle donné C_α, diffère de $f(z)$ aussi peu qu'on le veut.

Il existe, d'ailleurs, une multitude d'autres fonctions $f_1(z)$ rattachées à $f(z)$ et jouissant de pareille propriété. Parmi ces fonctions se trouvent aussi certains *polynomes*, ce qui fait que la suite d'entiers, en correspondance avec $f(z)$, *peut être réduite à une suite limitée.*

Pour le faire voir, considérons la fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

à rayon d'holomorphie r, et soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ une suite de nombres *commensurables* tels que le module de $\lambda_n a_n$ tend uniformément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment et que la série

$$H(z) = \frac{1}{|\lambda_0|} + \frac{z}{|\lambda_1|} + \frac{z^2}{|\lambda_2|} + \ldots$$

ait un rayon de convergence ρ non nul.

Soit c un nombre réel positif *commensurable* quelconque, supérieur au plus grand module de la fonction $H(z)$ pour z compris dans un cercle C ayant l'origine comme centre et un rayon ne surpassant ni r ni ρ.

Désignons par T_n la partie entière de la valeur numérique du nombre

$$t_n = 10^q c \lambda_n a_n$$

(q étant un nombre réel positif donné) et posons

$$\frac{T_n}{10^q c \lambda_n} = B_n, \qquad a_n - B_n = \delta_n;$$

on aura

$$|10^q c \lambda_n \delta_n| = |t_n - T_n| < 1.$$

ce qui montre que la fonction

$$\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \ldots,$$

manifestement holomorphe dans le cercle C, a pour toute valeur de z comprise dans C son module plus petit que

$$\frac{1}{10^q c} \sum_0^\infty \frac{R^n}{|\lambda_n|} < \frac{1}{10^q} \qquad (R = |z|).$$

En posant donc

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots = L(z),$$

on aura pour toute valeur de z, à l'intérieur de C,

$$(108) \qquad |f(z) - L(z)| < 10^{-q}.$$

Or, le module de $\lambda_n a_n$ tendant uniformément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, le nombre t_n deviendra plus petit que 1 à partir d'un rang fini $n = p$, de sorte qu'on aura

$$T_{p+1} = 0, \qquad T_{p+2} = 0, \qquad T_{p+3} = 0, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$B_{p+1} = 0, \qquad B_{p+2} = 0, \qquad B_{p+3} = 0, \qquad \ldots.$$

La fonction $L(z)$ se réduit donc à un polynome $L_p(z)$ de degré $p = q + h$, où h varie avec la suite λ_n choisie, mais ne change pas avec q. Les coefficients B_k du polynome étant commensurables, on peut écrire

$$L_p(z) = \frac{P_p(z)}{N},$$

où $P_p(z)$ est un polynome à coefficients nombres entiers et l'on aura pour toute valeur de z comprise dans C

$$(109) \qquad \left| f(z) - \frac{P_p(z)}{N} \right| < 10^{-q}.$$

En transportant l'origine en un point ordinaire arbitraire de $f(z)$, on arrive ainsi au résultat suivant :

Toute fonction $f(z)$ se laisse représenter au voisinage d'un quelconque de ses points ordinaires, avec une approximation

voulue, par le quotient d'un polynome (E) *et d'un nombre entier.*

Une telle représentation peut, d'ailleurs, s'effectuer d'une infinité de manières, suivant le choix de la suite λ_n. Elle réalise une correspondance entre une suite *limitée* de nombres entiers et une fonction différant de $f(z)$ aussi peu qu'on voudra.

Lorsque $f(z)$ est une fonction *entière* de z, le rayon du cercle C se laisse augmenter indéfiniment : il suffit de prendre pour les λ_n une suite de nombres commensurables tels que les deux expressions

$$(110) \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{|\lambda_n|}} \quad \text{et} \quad |\lambda_n a_n|$$

tendent à la fois uniformément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Ainsi, dans le cas d'une fonction $f(z)$ *de genre fini* γ, on prendra, par exemple, pour λ_n un nombre positif commensurable quelconque inférieur ou égal à $(1.2.3\ldots n)^{\frac{1}{\gamma+1}}$, puisque le produit d'un tel nombre par le module de a_n tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$, d'après le théorème connu de Poincaré.

Pour les fonctions $f(z)$ *de genre zéro*, on peut prendre

$$\lambda_n = 1.2.3\ldots n$$

et $c =$ nombre positif commensurable quelconque supérieur ou égal à e^R, où R désigne le rayon du cercle C.

IV. — Digression sur les séries (E).

20. Les séries de puissances à coefficients nombres entiers, désignées précédemment comme *séries* (E), s'introduisent dans un grand nombre de questions d'analyse mathématique et de la théorie des nombres. Aussi ont-elles été l'objet d'importants travaux dont quelques résultats généraux seront indiqués dans ce qui suit.

M. Borel a montré que si une série (E) représente une fonc-

tion $f(z)$ uniforme et régulière dans le cercle $|z| < 1$, abstraction faite d'un nombre limité de pôles, la fonction $f(z)$ est *rationnelle*. Une série (E) ne peut donc représenter une fonction *méromorphe transcendante* (1).

M. Pólya, en généralisant le théorème de M. Borel, a montré que si une série (E) représente une fonction uniforme dans un cercle $|z| \leqq R > 1$ et régulière, abstraction faite d'un nombre limité de singularités d'une nature quelconque, la fonction est nécessairement *rationnelle*. Le théorème de M. Pólya ne suppose rien sur la nature de ces singularités (2).

Le rayon de convergence d'une série (E) est manifestement *inférieur ou égal à* 1. M. Fatou est arrivé au résultat suivant à cet égard (3) :

Toutes les fois que le rayon de convergence d'une série (E) *est égal à* 1, *la série ne peut représenter une fonction méromorphe de z autre qu'une fonction rationnelle de la forme*

$$\frac{P(x)}{(1 - x^n)^m}, \qquad (111)$$

où $P(x)$ *est un polynome à coefficients entiers, et m, n des entiers positifs.*

M. Fatou a également montré qu'en mettant à part les fonctions rationnelles de la forme (111), *une série* (E) *à rayon de convergence égal à* 1 *ne peut représenter une intégrale régulière d'aucune équation différentielle linéaire.* Celles de ces séries dont la nature analytique est actuellement connue (on en rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques et dans les applications de

---

(1) E. Borel, *Sur une application d'un théorème de M. Hadamard* (*Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XVIII, p. 22-25); *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, p. 32-35.

(2) G. Pólya, *Ueber Potenzreichen mit ganzzahligen Koefficienten* (*Math. Annalen*, Band LXXVII, 4.H., p. 497-523).

(3) Fatou, *Sur les séries entières à coefficients entiers* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXXXVIII, 1904, p. 342-344).

l'analyse à la théorie des nombres) ont d'ailleurs leur cercle de convergence comme coupure (*loc. cit.*).

Enfin, d'après un théorème de M. Fatou, *une fonction algébrique non rationnelle, représentée par une série* (E), *possède au moins un point de ramification à l'intérieur du cercle de rayon* 1 (*loc. cit.*).

Ajoutons encore qu'on a étendu aux séries (E) les lois élémentaires qui régissent les nombres entiers et qui ont été appliquées dans d'autres domaines et généralisées de bien de façons : calcul des nombres entiers suivant un module; calcul des polynomes à coefficients entiers; calcul de ces polynomes suivant un module; calcul suivant deux modules, l'un étant un nombre et l'autre un polynome; calcul des entiers imaginaires, des quaternions, des tableaux de Kronecker; calcul dans un domaine de rationnalité; calcul des entiers algébriques, des entiers d'un domaine, etc. ([1]).

V. — Diverses formes des relations entre $f(z)$ et sa transformée (E).

21. Une transformation $\Delta|f|$, effectuée sur la fonction $f(z)$, établit généralement une relation entre $f(z)$ et la série (E)

$$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots \tag{112}$$

sa transformée par $\Delta|f|$. Cette relation, suivant l'ensemble d'opérations par lesquelles s'effectue $\Delta|f|$, peut affecter des formes variées et être, par exemple :

1° Une *relation en termes finis*, comme l'est la relation

$$Af(Mz) = F(z) \qquad (A \text{ et } M \text{ entiers fixes}),$$

valable pour toute fonction algébrique à coefficients a_n nombres commensurables;

2° Une *équation différentielle*, comme la relation

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + Af = F(z) \qquad (A = \text{const.}),$$

([1]) E. Cahen, *Sur les séries intégro-entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CLII, 1911, p. 124-127).

valable pour toute fonction $f(z)$ dont les coefficients a_n sont liés par une loi de récurrence de la forme

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+\mathrm{A}a_n-\mathrm{M}_n=0,$$

où les M_n sont des entiers fixes ou variables avec n;

3° Une *relation intégrale*, comme

$$\int_0^\infty e^{-t}f(zt)\,dt=\mathrm{F}(z).$$

valable pour toute fonction $f(z)$ dont les coefficients a_n sont de la forme $\frac{\mathrm{M}_n}{1.2.3\ldots n}$, ou bien

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t_1+t_2)}f(zt_1t_2)\,dt_1\,dt_2=\mathrm{F}(z),$$

valable pour les $f(z)$ à coefficient a_n de la forme $\frac{\mathrm{M}_n}{(1.2.3\ldots n)^2}$;

4° Une *relation mixte*, comme la relation

$$z\sqrt{\mathrm{M}}\,f'(z\sqrt{\mathrm{M}})=\mathrm{F}(z),$$

valable pour les polynomes $f(z)$ à coefficient a_n de la forme $\frac{\mathrm{M}^{\frac{n^2}{2}}}{n}$, où M est un entier fixe, ou bien celles auxquelles conduisent les règles du paragraphe **17**, etc.

De même, une transformation $\Delta|f|$ effectuée sur

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots \tag{113}$$

établit généralement une relation entre les a_n et les coefficients M_n de la transformée (112). Cette relation, que nous désignerons symboliquement par

$$\Omega[a_n,\mathrm{M}_n]=0, \tag{114}$$

peut être exprimée en termes finis, fournissant a_n explicitement ou implicitement en fonction de n et des M_n, ou bien une relation de récurrence, déterminant a_n à l'aide de n, des M_n et d'une suite de coefficients précédents, a_{n-1}, a_{n-2}, ... Ainsi, la transformation

$$\Delta[f]=\mathrm{A}f(\mathrm{B}z)\qquad(\mathrm{A}\text{ et }\mathrm{B}\text{ constants})$$

établit la relation linéaire

$$\mathrm{A}\mathrm{B}^n a_n-\mathrm{M}_n=0;$$

la transformation

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{mod} f(ze^{ti})|^2\, dt$$

se traduit par la relation quadratique

$$a_n^2 - M_n = 0;$$

la transformation

$$\Delta[f] = f''(z) + f(z)$$

entraîne la relation de récurrence

$$(n+1)(n+2)\,a_{n+2} + a_n - M_n = 0.$$

Il existe, d'ailleurs, des transformations $\Delta[f]$ *exceptionnelles*, lesquelles, appliquées à une fonction arbitraire $f(z)$, *n'entraînent aucune relation entre f et* F, en ce sens que la transformée $F(z)$ est indépendante de la fonction $f(z)$ à laquelle la transformation aura été appliquée. On sait, par exemple, qu'il existe des intégrales définies de la forme

(115) $$\int_a^b uv^n\, dt$$

(u et v étant des fonctions déterminées de t), nulles pour les valeurs entières positives de n. Telle serait l'intégrale signalée par Cauchy [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cti}}{(a-ti)^n}\, dt \qquad (a>0,\ c>0),$$

nulle pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, ainsi que les intégrales de cette espèce signalées par Stieltjes [2], parmi lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{\infty} t^{4n+1} e^{-t} \cos t\, dt.$$

La transformation

(116) $$\Delta[f] = \int_a^b \left[\frac{u_1 v_1 z}{1 - v_1 z} + uf(vz)\right] dz.$$

---

[1] *Œuvres*, 2e série, t. VII, p. 182.

[2] *Correspondances avec Hermite*, lettres 328 et 385 (Paris, Gauthier-Villars).

où u, v, a, b sont les éléments d'une pareille intégrale (115) et u_1, v_1, a, b les éléments d'une intégrale (115) ayant pour valeur un nombre entier λ_n, engendre la fonction définie par la série $\Sigma\lambda_n z^n$ n'ayant aucun rapport avec la fonction $f(z)$ qui ne laisse aucune trace spécifique dans la transformée (E).

TROISIÈME PARTIE.

SPECTRES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

I. — Spectres d'une fonction.

22. La possibilité d'établir une correspondance définie entre une fonction $f(z)$ et une suite de nombres entiers conduit bien naturellement à la notion de *spectres des fonctions*.

Étant données une fonction $f(z)$ et une transformation $\Delta[f]$ compatible avec elle, nous désignerons comme *spectre de* $f(z)$ *rattaché à cette transformation* un spectre quelconque de la suite de nombres entiers M_n avec lesquels $f(z)$ se trouve en correspondance établie par $\Delta[f]$ considéré.

De cette définition résulte directement la règle suivante :

Règle. — *On formera la génératrice* $\Phi(z)$ *du spectre, et le spectre* $S = \Phi(1)$ *lui-même d'une fonction* f *donnée, pour un* $\Delta[f]$ *donné, d'après les règles du paragraphe 5, à la condition d'y substituer à la caractéristique spectrale principale la série* (E),

$$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots$$

en laquelle $f(z)$ *se trouve transformée par* $\Delta[f]$.

La valeur numérique S fournissant le spectre s'obtient généralement comme valeur d'une intégrale définie, simple ou multiple, et dans certains cas même sous forme explicite en termes finis, comme il a été indiqué dans les paragraphes 5 et 7.

Rappelons le rôle, indiqué dans ces paragraphes, que jouent les fonctions entières hypertranscendantes

$$(117) \qquad \chi(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n q^{n^2+\lambda n} z^n \qquad (|q| < 1 ; \lambda > 0)$$

et, en particulier, la fonction auxiliaire elliptique

$$(118) \qquad \theta(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} z^n$$

dans la formation de génératrices spectrales et de spectres pour un rythme spectral *uniformément accéléré quelconque*. Rappelons aussi le fait que, d'après ce qui précède, toute fonction $f(z)$ admet des spectres à rythme uniformément accéléré ainsi qu'aux rythmes à accélération croissante.

Premier exemple. — La génératrice du spectre de la fonction

$$f(z) = \frac{5z}{1+z},$$

correspondant à

$$\Delta[f] = f(-z)$$

et ayant le rythme uniforme $h_k = 1$, est

$$\Phi(z) = f\left(-\frac{z}{10}\right) = \frac{5}{10+z};$$

le spectre sera

$$S = \frac{5}{11} = 0,45555\ldots$$

Deuxième exemple. — La génératrice du spectre de e^z, correspondant à

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\, dt$$

et ayant le rythme uniforme $h_k = 1$, est

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-t} f\left(\frac{zt}{10}\right) dt = \int_0^\infty e^{\left(\frac{z}{10}-1\right)t}\, dt;$$

le spectre sera

$$S = \int_0^\infty e^{-0,9t}\, dt = 1,11111\ldots.$$

Troisième exemple. — Pour la fonction

$$f(z) = 17 \log(1 - zi)$$

et

$$\Delta[f] = zi\, f'(-zi),$$

le spectre à rythme uniforme $h_k = 2$ a pour génératrice

$$\Phi(z) = \frac{17z}{100 - z}$$

et pour valeur numérique

$$S = \frac{17}{99} = 0,17070707\ldots$$

Quatrième exemple. — La fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

à coefficients a_n définis par la loi de récurrence

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \lambda a_n - M_n = 0$$

(λ = const., M_n = entier fixe ou variable avec n) admet la transformation

(119) $$\Delta[f] = f''(z) + \lambda f(z).$$

Le spectre correspondant de $f(z)$ sera fourni par l'une des valeurs numériques suivantes :

a. Le spectre à rythme uniforme $h_k = h$ par

$$S = F(10^{-h}),$$

où $F(z)$ désigne le second membre de (119);

b. Le spectre à rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$ par

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho e^{ti})\,\chi\left(\frac{e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

où $\chi(z)$ désigne une transcendante (117) et ρ une constante arbitraire de module plus petit que le rayon d'holomorphie de $f(z)$ autour de $z = 0$. Dans le cas des M_n réels et positifs, la transcendante χ est à remplacer par (118).

Cinquième exemple. — Pour les fonctions définies par les séries exponentielles

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{2\alpha z} + \ldots,$$

où les A_n sont des entiers positifs, et pour la transformation (mani-

festement compatible avec la suite des A_n)

$$\Delta[f] = f\left(\frac{\log z}{\lambda}\right) \qquad \text{où} \qquad \lambda = \alpha \log e$$

(le logarithme étant à base 10), le spectre à rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$ sera la valeur numérique de

$$\text{(120)} \qquad S = \varphi\left(-\frac{h+\frac{c}{2}}{\lambda}\right),$$

où $\varphi(z)$ désigne la fonction

$$\text{(121)} \qquad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n q^{n^2} e^{n\alpha z}, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}.$$

Lorsque le nombre de chiffres de A_n ne surpasse pas un entier fini et fixe l, la fonction $f(z)$ admet des spectres à rythme uniforme $h_k = h \geqq l$ et un tel spectre est fourni par la valeur numérique de

$$\text{(122)} \qquad S = f\left(-\frac{h}{\lambda}\right).$$

Il est, d'ailleurs, possible d'exprimer aussi le spectre (120) à l'aide de $f(z)$, sous la forme d'une intégrale définie, comme dans le cas de séries de puissances.

23. Comme il a été indiqué au paragraphe 19, il est toujours possible (et de diverses manières) de représenter une fonction analytique $f(z)$ au voisinage d'un de ses points ordinaires, et avec une approximation voulue, par une fonction (E).

Nous désignerons comme *spectre approché* de $f(z)$ dans un cercle C, dans lequel la fonction reste holomorphe, le spectre d'une quelconque des fonctions (E) représentant approximativement $f(z)$ dans C. *A un spectre approché se rattache le nombre* ε *indiquant le degré d'approximation*, c'est-à-dire tel que la différence de $f(z)$ et de (E) soit plus petit que ε dans le cercle C.

Ainsi, la fonction $f(z)$ étant définie au voisinage de son point ordinaire $z = \alpha$ par le développement

$$\text{(123)} \qquad f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots$$

et λ étant un nombre positif donné, prenons pour M_n l'entier composé de la partie entière et de g premières décimales du nombre $a_n \lambda^n$. On considérera comme un spectre approché de $f(z)$ dans le cercle C_α (ayant $z = \alpha$ comme centre et le rayon plus petit que celui du cercle d'holomorphie de f autour de $z = \alpha$) le spectre de la suite d'entiers M_n, et son degré d'approximation sera le nombre ε égal à la plus grande valeur que prend l'expression

$$\frac{10^{-g} \lambda}{|\alpha + \lambda - z|}$$

pour les points z compris à l'intérieur du cercle C_α (*voir* § 19). En disposant de g, on peut rendre ε aussi petit qu'on veut.

Nous avons indiqué au même paragraphe qu'une fonction analytique $f(z)$ se laisse représenter au voisinage d'un point ordinaire $z = \alpha$, avec une approximation voulue (et cela d'une infinité de manières), par le quotient d'un polynome (E) et d'un nombre entier N, de sorte que, dans un cercle donné C_α, dans lequel cette représentation est faite, on ait

$$\left| f(z) - \frac{(E)}{N} \right| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre donné à l'avance.

Le spectre des coefficients du polynome (E) à un rythme quelconque est aussi à considérer comme un spectre approché de $f(z)$ dans le cerche C_α, à la condition de lui adjoindre l'entier N qui le complète pour la détermination du polynome correspondant $\frac{(E)}{N}$.

A toute fonction analytique $f(z)$, et pour un cercle donné C_α, on peut ainsi faire correspondre l'ensemble d'un spectre limité et d'un nombre entier, qui contient tous les éléments pour la détermination de la fonction dans C_α avec une approximation donnée à l'avance.

24. D'après ce qui se trouve indiqué au paragraphe 18, en prenant pour M_n la partie entière du nombre $a_n \lambda^n$, la fonction (E) ayant les M_n comme coefficients détermine complètement les singularités de $f(z)$ comprises dans un cercle C_α : celles-ci ne sont autres que les singularités mêmes de (E) comprises dans le

même cercle C_α. Et comme cette fonction (E) se laisse définir par un spectre complété par un ensemble (D) de données qualitatives (mode de segmentation du spectre et les signes à attribuer aux segments), on a le résultat suivant :

A toute fonction analytique $f(z)$ et pour un cercle donné C_α on peut faire correspondre un spectre, lequel, avec l'adjonction d'un ensemble de données qualitatives (D), contient tous les éléments pour la détermination des singularités de $f(z)$ dans C_α.

Les singularités se trouvent ainsi résumées, condensées (à données D près) en un seul nombre qui, pour cette raison, peut être considéré comme *spectre des singularités de $f(z)$ dans le cercle C_α.*

On aurait, d'une manière analogue, *un spectre rattaché aux zéros de $f(z)$* compris dans un cercle de C_α, dans lequel $f(z)$ est méromorphe, en substituant, dans ce qui précède, aux a_n les coefficients A_n de la fonction $\frac{1}{f(z)}$ s'exprimant à l'aide des a_n par la formule du paragraphe 18.

On aurait de même des spectres rattachés aux racines de l'équation $f(z) - a = 0$ ($a =$ constante donnée), ainsi que de l'équation $f'(z) = 0$, ou bien $f''(z) = 0$, etc., en remplaçant, dans ce qui précède, les a_n par des combinaisons appropriées des a_n et de n.

II. — Fonction correspondant à un spectre donné.

25. Une fonction $f(z)$ admet une infinité de spectres variant, d'une part avec la transformation $\Delta[f]$ par laquelle est établie la correspondance entre $f(z)$ et la suite d'entiers M_k, et d'autre part avec le rythme suivant lequel le spectre des M_k, représentant celui de $f(z)$, aura été formé.

Mais pour une transformation $\Delta[f]$ et un rythme spectral déterminés, la fonction n'admet qu'un seul spectre.

Réciproquement, un nombre donné S peut coïncider avec des spectres d'une infinité de fonctions $f(z)$ suivant : 1° le rythme spectral qu'on lui attribue; 2° le mode de correspondance entre

les entiers M_k formant les cannelures d'un tel spectre et la fonction f, ce mode variant à l'infini suivant le $\Delta|f|$ par lequel la correspondance est établie; 3° les signes σ_n qu'on attribuera aux parties réelles et aux coefficients de i des parties imaginaires des M_n avant de le faire figurer comme série (E), laquelle, à l'aide du $\Delta|f|$ appliqué, déterminera la fonction $f(z)$.

Mais pour un rythme spectral h_k, *un* $\Delta[f]$ *et un ensemble de signes* σ_n *déterminés, un nombre* S *caractérise comme spectre généralement une seule fonction* $f(z)$. Il ne peut y avoir de l'ambiguïté ou de l'indétermination partielle que dans les cas où la relation entre $f(z)$ et les M_k, à laquelle conduit le $\Delta|f|$ appliqué (*voir* § 21), ne détermine pas complètement $f(z)$ à l'aide des M_k (par exemple, lorsque les a_n sont fournis comme racines d'une équation non linéaire, ou par une relation de récurrence laissant indéterminés un certain nombre des premiers coefficients a_n).

La donnée 2° se trouve impliquée dans la forme de $\Delta|f|$; les données 1° et 3° sont fournies par l'ensemble (D) de données qualitatives servant à former la caractéristique qualitative du spectre de la suite M_k engendrée par $\Delta|f|$.

La règle pour la détermination effective de la fonction $f(z)$ correspondant à un nombre donné S comme spectre et un ensemble donné (D) résulte de celles du paragraphe 12 et est la suivante :

On partagera le nombre S en tranches successives, d'après le rythme spectral h_k fourni par (D), et ces tranches mettront en évidence des cannelures spectrales successives convenant au problème. A chacun des entiers N_k formant ces cannelures, on rattachera celui des facteurs $\theta_k = 1, -1, i, -i$ qui lui correspond d'après les indications de (D) et l'on formera la fonction

$$F(z) = \theta_0 N_0 + \theta_1 N_1 z + \theta_2 N_2 z^2 + \ldots \tag{124}$$

La fonction cherchée $f(z)$ *est déterminée comme celle dont la transformée par* $\Delta[f]$ *est* $F(z)$. Dans le paragraphe 21 se trouvent indiquées les formes variées que peuvent affecter les relations entre f et F auxquelles se ramène le problème d'une telle détermination de f.

Premier exemple. — Quelle est la fonction $f(z)$ à coeffi

cients a_n réels et positifs, dont le spectre à rythme uniforme $h_k = 2$, fourni par

(125) $$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\,dt,$$

est le nombre $\frac{7}{11}$?

Les tranches spectrales de $S = \frac{7}{11} = 0,636363\ldots$ (sauf la première) présentent toutes les mêmes cannelures 63 et l'on a $\theta_k = 1$; par suite, on a

$$F(z) = \frac{63}{1-z}.$$

Et comme le $\Delta[f]$ (125) appliqué à une fonction $f(z)$ arbitraire établit la relation

$$n!\,a^n - M_n = 0,$$

la seule fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions du problème est

$$f(z) = 63\,e^z - 1.$$

Deuxième exemple. — Quelle est la fonction $f(z)$ à coefficients a_n réels, alternativement positifs et négatifs, dont le spectre à rythme uniforme $h_k = 1$, fourni par

$$\Delta[f] = z^3 \int_0^\infty e^{-t} t^3 f(zt)\,dt,$$

est le nombre $\frac{1}{3}$?

Les tranches spectrales de $S = \frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ (sauf la première) ont les mêmes cannelures 3 et l'on a $\theta_{2k} = 1$, $\theta_{2k+1} = -1$; on a donc

$$F(z) = \frac{3}{1+z},$$

et, par la même raison que dans l'exemple précédent, la fonction ne saurait différer de

$$f(z) = \frac{3(e^{-z}-1)}{z^3}.$$

Troisième exemple. — Déterminer la fonction $f(z)$ dont le spectre à rythme uniforme $h_k = 3$, fourni par

$$\Delta[f] = f''(z) + \lambda f(z) \qquad (\lambda = \text{const.})$$

transformant f en série (E) à coefficients réels positifs, est le nombre $\frac{9097}{333000}$.

La première tranche spectrale de

$$S = \frac{9097}{333000} = 0,027318318318\ldots$$

présente la cannelure 27, et toutes les autres tranches les cannelures 318, avec $\theta_k = 1$. La fonction est donc l'intégrale générale de l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda y = \frac{27z + 291z^2}{1-z}.$$

26. La fonction F(z), transformée de $f(z)$ par le $\Delta|f|$, étant une fonction (E), les remarques suivantes peuvent présenter de l'intérêt :

1° Une fonction (E) dont le spectre, à n'importe quel rythme, est un nombre entier, se réduit à une constante; lorsque le spectre n'a qu'un nombre limité de décimales, la fonction est un polynome en z.

Tel est, par exemple, le cas de toute fonction (E) dont un spectre s'exprime comme une fraction ordinaire irréductible dont le dénominateur ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5. Dans le cas de rythme uniforme $h_k = h$, en désignant par m le plus fort exposant des facteurs 2 et 5 entrant dans le dénominateur de la fraction, le degré du polynome (E) sera égal à $\frac{m}{h}$, ou bien à la partie entière de $1 + \frac{m}{h}$, suivant que m est divisible par h ou non.

2° Une fonction (E) à coefficients réels positifs, dont le spectre ayant un rythme uniforme s'exprime comme une fraction ordinaire irréductible dont le dénominateur contient d'autres facteurs premiers que 2 et 5, est le quotient de deux polynomes P(z) et Q(z), le premier étant à coefficients nombres entiers, et le second ayant pour zéros les racines de l'unité, avec Q(0) = 1.

Le fait est la conséquence de la proposition de M. Fatou citée au paragraphe 20.

3° Une fonction (E) à coefficients réels positifs, dont le spectre

ayant un rythme uniforme est un nombre incommensurable, est une fonction ayant dans le cercle de rayon 1 (de centre $z = 0$) ou sur ce cercle, d'autres singularités que les pôles.

Le fait est la conséquence du théorème de M. Borel cité au paragraphe **20**.

Enfin, à l'égard de ce qui a été dit aux paragraphes **23** et **24**, nous ajouterons les remarques suivantes :

1° Un *spectre approché*, au sens du paragraphe **23**, ne détermine la fonction $f(z)$ qu'à une fonction $\delta(z)$ près, dont le module dans le cercle C_α ne surpasse pas une quantité ε donnée à l'avance rattachée au spectre et à C_α;

2° Un *spectre des singularités*, au sens du paragraphe **24**, ne détermine $f(z)$ qu'à une fonction $\delta(z)$ près n'ayant pas des singularités dans C_α;

3° Un *spectre des zéros*, rattaché à une fonction entière d'un genre donné, détermine cette fonction à un facteur près de la forme $e^{G(z)}$, où $G(z)$ est une fonction entière de z.

QUATRIÈME PARTIE.

LA MÉTHODE SPECTRALE.

I. — Principe de la méthode.

27. Les *spectres numériques* peuvent jouer un rôle utile comme instrument de calcul. Ils conduisent à un procédé particulier de calcul numérique que l'on peut nommer *procédé spectral*, à cause des analogies frappantes qu'il présente avec celui de l'analyse spectrale en Chimie.

Calculer une valeur numérique, ou une suite limitée ou illimitée de valeurs numériques a_0, a_1, a_2, ..., ou bien une partie déterminée de chiffres composant l'une de ces valeurs, par un procédé spectral, c'est *déterminer ces inconnues à l'aide d'un spectre numérique* S *convenablement rattaché à la suite des* a_k.

Ceci peut se faire de deux manières différentes :

1° On peut calculer une inconnue ou une partie déterminée de chiffres composant la valeur numérique d'une inconnue, comme spectre S d'une fonction connue (fourni par un $\Delta[f]$ connu et ayant un rythme spectral connu), ou bien par un segment déterminé du spectre S, ou bien comme une combinaison connue de S.

Ainsi, la valeur numérique $1,01^6$ s'obtient comme spectre de la fonction $(1+z)^6$ à rythme uniforme $h_k = z$, qui est

$$S = 1,061520150601;$$

la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4\cos^2 t)\,dt.$$

où $\theta(z)$ est la transcendante

$$(127) \qquad \theta(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+n} z^n, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

s'obtient comme produit par $\frac{\pi}{2}$ du spectre S à rythme uniformément accéléré $h_k = k$ de la fonction

$$(128) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{2n}{n}^2 z^n,$$

qui est

$$S = 0,1020060020000700002520000924\ldots \text{ (}^1\text{)}.$$

2° On peut calculer une suite limitée ou illimitée d'inconnues $a_0, a_1, a_2, \ldots$, ou bien une inconnue a_k faisant partie de la suite, ou bien un ou plusieurs chiffres composant a_k, à l'aide de cannelures ou de raies d'un spectre S.

Ainsi, le nombre de diviseurs d'un entier variable k se calculerait comme $k^{\text{ième}}$ cannelure d'un spectre de la série de Lambert [2]; le deuxième chiffre du nombre $\binom{9}{4}$ est fourni par la deuxième raie de la quatrième cannelure du spectre S de la fonction $(1+z)^9$ à rythme uniforme $h_k = 3$, qui est

$$S = 1,009036084126126084036009001;$$

la probabilité pour que, sur 10 épreuves, les deux événements A et B ayant pour probabilités respectives $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, A se produise $10 - k$ fois et B k fois, s'obtient en divisant la $k^{\text{ième}}$ cannelure du spectre de la fonction $(2+z)^{10} - 2^{10}$, à rythme uniforme $h_k = 5$, par le nombre fixe 3^{10}.

Cette dernière manière de détermination des inconnues s'applique chaque fois que celles-ci se trouvent en correspondance définie avec une fonction (E) et se résume en la règle suivante :

Si l'on partage le spectre S de la fonction (E) à rythme h_k en

---

(1) *Voir* le troisième exemple du paragraphe 6.

(2) *Voir* le paragraphe 30.

tranches consécutives, la première étant composée de h_1 premières décimales de S, la deuxième de h_2 décimales suivantes, etc., l'entier M_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) faisant partie de la suite $M_0, M_1, M_2, \ldots$ d'inconnues auxiliaires entières, sera fourni comme groupe de chiffres significatifs de la $n^{\text{ième}}$ tranche, et M_0 coïncidera avec la partie entière de S (abstraction faite des signes des parties réelles et imaginaires des M_n). Autrement dit : M_n coïncidera avec la $n^{\text{ième}}$ cannelure du spectre S et son $k^{\text{ième}}$ chiffre avec la raie correspondante de cette cannelure. Les M_n étant ainsi déterminés, les inconnues a_n le seront à l'aide de la relation $\Omega(a_n, M_n) = 0$ (explicite ou de récurrence), établissant la correspondance entre les a_n et les M_n fournis par le spectre, après avoir affecté chacun des M_n des signes σ_n qui doivent lui être rattachés d'après les conditions du problème.

Une valeur *suffisamment approchée* du nombre S fournit, d'après la règle du paragraphe 12, les *valeurs exactes* d'autant d'inconnues a_n que l'on veut : la détermination de $n+1$ premiers entiers $M_0, M_1, M_2, \ldots$ n'exige que la connaissance d'une valeur approchée de S avec $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ décimales exactes, et l'on aura alors les a_n correspondants à l'aide de la relation

$$\Omega(a_n, M_n) = 0.$$

Ainsi, pour la détermination exacte des inconnues $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$, il suffit de connaître une valeur approchée de S avec ph premières décimales exactes, dans le cas où le rythme spectral est le rythme uniforme $h_k = h$, et avec $ph + \frac{p(p-1)}{2}c$ premières décimales exactes dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$.

28. La *méthode spectrale* consiste, comme on le voit, *à disperser* en un *spectre numérique* les inconnues primitives ou auxiliaires d'un problème, comme l'analyseur disperse, en analyse spectrale, un faisceau de rayon lumineux en un spectre lumineux. Les inconnues se trouvent dans le spectre numérique, rattaché au problème, dispersées, séparées et déterminées comme cannelures et raies spectrales d'une manière analogue à celle par laquelle les éléments inconnus d'une substance chimique sont déterminés en analyse spectrale. La caractéristique spectrale

principale du paragraphe 9 y joue un rôle analogue à celui du faisceau lumineux émis par la substance à analyser; la génératrice spectrale joue un rôle analogue à celui du prisme analyseur.

Lorsque les inconnues primitives sont des nombres *entiers*, leur complexe se trouve *directement* analysé par la génératrice spectrale : elles sont dispersées en spectre comme le sont les indices spectraux caractéristiques des éléments, entremêlés dans le corps incandescent, par le prisme.

Lorsque les inconnues sont des nombres *non entiers*, il y a lieu de leur faire subir une *préparation préalable* avant de le faire intervenir dans la génératrice spectrale, comme l'on fait subir, dans certains cas, une modification préalable déterminée au faisceau lumineux émis par la substance à analyser, avant de le faire passer à travers le prisme dispersant (l'interposition, par exemple, sur le trajet de la lumière à analyser, d'un ballon de verre rempli de vapeurs déterminées). Cette préparation consisterait, ici, en une transformation $\Delta[f]$ compatible avec la suite des inconnues.

L'analogie se poursuit encore plus loin si l'on remarque que la dispersion d'un spectre numérique varie avec la caractéristique spectrale qualitative que le calculateur est maître de modifier pour une même caractéristique spectrale principale, comme la dispersion d'un spectre lumineux change avec les conditions de l'expérience que l'expérimentateur peut modifier pour une même substance à analyser (changements, par exemple, de température, de pression, de raréfaction). La dispersion uniforme de spectres numériques trouve son analogue dans une foule de cas qu'offre l'analyse spectrale chimique (cas, par exemple, de certaines parties du spectre du soufre engendré au moyen du tube à gaines); il en est de même de dispersion uniformément croissante (cas, par exemple, du spectre ordinaire du soufre, où les distances des maxima vont en croissant uniformément vers le violet).

Les moyens de changer la dispersion des spectres numériques ne sont pas spécifiques à la suite particulière à laquelle le spectre se rattache, en ce sens, qu'en changeant les éléments influant sur la caractéristique spectrale qualitative, on modifie la dispersion du spectre d'une suite quelconque, et dans un même sens. De même,

le changement de la température ou de la pression modifie la dispersion d'un spectre lumineux dans un même sens pour divers rayons analysés.

Une transformation $\Delta[f]$, d'après ce qui est indiqué au paragraphe **21**, appliquée à une fonction considérée $f(z)$, peut conduire à un spectre *continu*, composé de seuls zéros (sans raies), quoique une autre transformation $\Delta[f]$ conduit à un spectre *discontinu*, à raies. Le fait a aussi son analogue dans l'analyse spectrale (lorsque, par exemple, l'hydrogène, l'oxyde de carbone, l'hydrogène sulfuré, brûlent dans l'oxygène, le spectre de la flamme analysée par le prisme ne présente aucune raie, quoique, dans d'autres, le spectre des mêmes gaz est discontinu).

De telles analogies, ainsi qu'une multitude d'autres offertes par les spectres numériques et spectres lumineux, justifient, croyons-nous, le nom que nous donnons au procédé de calcul exposé dans ce qui précède.

Rappelons encore l'avantage qu'offre la méthode spectrale au point de vue de la pratique de calcul numérique : elle fournit le moyen :

1° De déterminer à la fois, *par la continuation suffisante d'un même calcul numérique*, les valeurs d'autant d'inconnues que l'on veut, ainsi que, séparément, *un chiffre voulu ou une décimale voulue* d'une des inconnues;

2° De déterminer les *valeurs exactes* d'un nombre voulu d'inconnues à l'aide d'une valeur *suffisamment approchée* d'une donnée du problème.

Dans les paragraphes qui suivent nous indiquerons quelques applications du procédé spectral de calcul numérique, qui mettront en évidence la pratique de son emploi.

II. — Quelques applications arithmétiques.

A. — *Spectres de la partition des nombres.*

29. Soient :

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad g; \tag{129}$$

$$m,\quad n,\quad p,\quad \ldots,\quad s \tag{130}$$

deux suites données d'entiers positifs, les entiers (129) étant premiers entre eux. Désignons par $P(k)$ l'entier positif indiquant de combien de manières l'entier k peut s'écrire sous la forme

$$k = ax + by + \ldots + gt \tag{131}$$

lorsque $x, y, \ldots, t$ parcourent la suite de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0, 1, 2, \ldots, m, \\ y = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t = 0, 1, 2, \ldots, s. \end{array}\right. \tag{132}$$

En posant

$$V(x, \alpha, \mu) = \frac{x^{(\mu+1)\alpha} - 1}{x^\alpha - 1} = 1 + x^\alpha + x^{2\alpha} + \ldots + x^{\mu\alpha}$$

(où α et μ sont deux entiers positifs arbitraires), le coefficient de x^k dans le polynome

$$W(x) = V(x, a, m)\,V(x, b, n)\ldots V(x, g, s)$$

de degré $\lambda = ma + nb + \ldots + sg$ est précisément le nombre $P(k)$. Si donc, on désigne par h une limite supérieure du nombre de chiffres de $P(k)$, le nombre

$$S = W(10^{-h})$$

représentera le spectre des $P(k)$ à rythme uniforme $h_k = h$.

D'autre part, en désignant par 9_k l'entier que l'on obtient en écrivant le chiffre 9 k fois consécutivement ($9_1 = 9$, $9_2 = 99$, $9_3 = 999$, ...). On aura

$$V(10^{-h}, \alpha, \mu) = 10^{-\mu\alpha h}\,\frac{9_{(\mu+1)\alpha h}}{9_{\alpha h}} \tag{133}$$

et, par suite,

$$S = 10^{-\lambda h}\,N, \tag{134}$$

où N désigne le nombre entier formé exclusivement des chiffres 9 :

$$N = \frac{9_{(m+1)ah}\cdot 9_{(n+1)bh}\cdots 9_{(s+1)gh}}{9_{ah}\cdot 9_{bh}\cdots 9_{gh}}. \tag{135}$$

Ceci met en évidence la propriété arithmétique suivante des entiers N :

L'entier formé du groupe de chiffres significatifs de N,

commençant par le $(kh+1)^{\text{ième}}$ *et terminé par le* $(k+1)^{\text{ième}}$ *chiffre de* N, *coïncide avec le nombre* $\mathrm{P}(k)$, *et cela pour toute valeur de* k *ne surpassant pas* λh.

Laguerre [1] a établi une formule générale donnant une valeur approchée de $\mathrm{P}(k)$ pour un système donné $(k, a, b, c, \ldots, g)$ et pour tous les systèmes possibles $(x, y, \ldots, t)$, avec l'erreur commise ayant une limite supérieure *indépendante de* k. Dans le cas, par exemple, de l'équation à deux inconnues

$$k = ax + by,$$

la formule de Laguerre fournit

$$\mathrm{P}(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

où la valeur absolue de δ est plus petite que 1; pour l'équation à trois inconnues

$$k = ax + by + cz$$

elle fournit

$$\mathrm{P}(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

le terme complémentaire δ étant, en valeur absolue, plus petit qu'une certaine quantité fixe pour tous les k. *Ces formules permettent d'assigner à* h *des valeurs que suppose la proposition précédente.*

Remarquons, aussi, que le nombre (133) représente le spectre S_α de la suite $111\ldots1$ (à μ unités) ayant le rythme uniforme $h = \alpha h$, de sorte que le spectre S, fourni par le nombre (134), est égal au produit de spectres partiels $\mathrm{S}_a, \mathrm{S}_b, \ldots, \mathrm{S}_g$. Et comme (abstraction faite de la virgule décimale)

$$\mathrm{S}_\alpha = 1\underbrace{00\ldots0}_{\substack{\alpha h - 1\\ \text{zéros}}}1\underbrace{00\ldots0}_{\substack{\alpha h - 1\\ \text{zéros}}}1\underbrace{00\ldots0}_{\substack{\alpha h - 1\\ \text{zéros}}}10\ldots,$$

où le groupe de chiffres $00\ldots01$ se répète μ fois, on peut calculer le nombre N en additionnant les unités convenablement distri-

(1) E. LAGUERRE, *Sur la partition des nombres* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. V, 1877; *Œuvres*, t. I, p. 218-220).

buées (et imaginer, même, un appareil simple effectuant rapidement ce calcul).

Pour l'équation, par exemple

$$3x + 2y = k, \qquad 0 \leqq x \leqq 10, \qquad 0 \leqq y \leqq 9,$$

comme le nombre

$$\log\left(1 + \frac{\lambda}{ab}\right) = \log\left(1 + \frac{48}{6}\right) = \log 9$$

est plus petit que 1, on peut prendre $h = 1$, ce qui fournit

$$N = 101111212222323333434334334334\ldots,$$

et le nombre $P(k)$ coïncide avec le $(k+1)^{\text{ième}}$ chiffre de N. Ainsi, l'équation

$$3x + 2y = 19$$

a exactement trois solutions en $x \leqq 10$ et $y \leqq 9$: ce nombre est bien indiqué par le vingtième chiffre de N.

Le même procédé, appliqué à diverses autres fonctions rationnelles comme caractéristiques spectrales, conduit à d'autres propositions de cette espèce. On sait, par exemple (¹), que le nombre $Q_{p,q}$ de décompositions de tous les nombres en (au plus) q parties, chacune étant au plus égale à un nombre donné p, est le coefficient de $ax^{p,q}$ dans le développement de

$$F(x) = \frac{1}{(1-a)(1-x)(1-ax)(1-ax^2)\ldots(1-ax^p)}.$$

De même, on sait que le nombre $R_{k,k'}$ de solutions en nombres entiers positifs de deux équations linéaires simultanées

$$\begin{aligned} ax + by + \ldots + gt &= k, \\ a'x + b'y + \ldots + g't &= k' \end{aligned}$$

pour k et k' variables, est le coefficient de $u^k v^{k'}$ dans le développement de

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{(1 - u^a v^{a'})(1 - u^b v^{b'})\ldots(1 - u^g v^{g'})}.$$

(¹) Mac-Mahon, *Philos. Trans.*, London, 187/A, 1876, p. 619.

Les expressions $F(10^{-h})$ et $\Phi(10^h, 10^{-h'})$, où h et h' sont des entiers suffisamment grands, sont certains nombres rationnels dont la suite d'un nombre déterminé de premières décimales s'exprime en écrivant, les uns à la suite des autres, les entiers successifs $Q_{p,q}$ ou $R_{k,k'}$, et, en intercalant entre eux un certain nombre de zéros d'autant plus grand, que h et h' sont plus grands.

B. — *Spectres des nombres des diviseurs d'un entier variable.*

30. D'après la propriété bien connue de la série de Lambert, si l'on pose

$$(136)\quad f(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \ldots + \frac{z^m}{1-z^m} = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

$$(137)\quad \varphi(z) = \frac{z(z+1)}{1-z} = z + 2(z^2 + z^3 + z^4 + \ldots),$$

le coefficient $N(k)$ du développement

$$F(z) = f(z) - \varphi(z) = N(1)z + N(2)z^2 + N(3)z^3 + \ldots$$

coïncidera, pour $k < m$, avec le nombre des diviseurs de k autres que 1 et k.

Si donc on prend pour h une limite supérieure des $\log N(k)$ ($k = 1, 2, \ldots$), l'expression

$$S = F(10^{-h})$$

représentera le spectre des nombres des diviseurs de k à rythme uniforme $h_k = h$.

D'autre part, on a (avec la notation du paragraphe 29)

$$f(10^{-h}) = \frac{1}{9_h} + \frac{1}{9_{2h}} + \ldots + \frac{1}{9_{mh}},$$

$$\varphi(10^{-h}) = 10^{-h}\frac{9_{2h}}{9 \cdot 9_h}.$$

Converti en fraction décimale, le nombre $f(10^{-h})$ est une fraction périodique *simple* ayant une période de mh chiffres, et $\varphi(10^{-h})$ est une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique et la période ont chacune h chiffres. Le spectre S lui-même sera donc une fraction périodique *mixte* dont la partie

non périodique a h chiffres et la période mh chiffres, et ce qui précède met en évidence la propriété arithmétique suivante de ces nombres rationnels :

$$(138) \qquad S = \frac{1}{9h} + \frac{1}{92h} + \ldots + \frac{1}{9mh} - 10^{-h}\frac{92h}{9 \cdot 9h}.$$

Partageons la suite des premières décimales de S, formant l'ensemble de sa partie non périodique et la première période, en tranches successives $T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}$ à h chiffres, de sorte que la tranche T_k ($k = 1, 2, \ldots, m+1$) commence par la

$$[(k-1)h+1]^{\text{ième}}$$

et se termine par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de S, et considérons les tranches $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

L'entier formé du groupe de chiffres significatifs de la tranche T_k *coïncide avec le nombre de diviseurs de k autres que* 1 *et k.*

En désignant comme *lacune* toute tranche T_k composée exclusivement des zéros, on en tire le corrolaire suivant :

Le nombre de lacunes que présente l'ensemble de k premières tranches $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *est exactement égal au nombre des nombres premiers inférieurs à k, et cela pour toute valeur* $k \leq m$.

Si l'on remarque que

$$\frac{1}{9kh} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\ldots;$$

$$10^{-h}\frac{92h}{9 \cdot 9h} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{h-1}1\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\ldots,$$

on voit que l'ensemble de tranches $T_1, \ldots, T_m$ se calculerait, pour tout m et h donné, par la seule addition d'unités (par exemple à l'aide d'un appareil facile à imaginer).

On aura une valeur de h, compatible avec ce qui précède, en prenant $h \geq \log m$ (*voir* le deuxième exemple du paragraphe **32**).

Rappelons aussi l'inégalité de M. Wigert,

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log k}{\log\log k}},$$

valable pour $\varepsilon > 0$ et arbitraire, pourvu que k soit assez grand.

On trouve, par exemple, pour $m = 100$ (ce qui fournit $h \leqq 2$) et pour $h = 2$,

$$S = 0,00000001000200020102000400020203000400040002000601\ldots.$$

Les vingt premières tranches à deux chiffres contiennent neuf lacunes, les cent premières tranches en contiennent vingt-six, indiquant qu'il y a neuf nombres premiers inférieurs à 20, qu'il y en a vingt-six inférieurs à 100, etc.

C. — *Spectres des sommes des puissances semblables des nombres entiers consécutifs.*

31. En désignant par $P_{m,k}(z)$ le polynome de degré m défini par la loi de récurrence

$$(139) \qquad P_{m,k} - z P'_{m,k-1} = 0, \qquad P_{m,0} = \frac{z^{m+1} - z}{z - 1},$$

on a

$$(140) \qquad P_{m,h} = 1^k z + 2^k z^2 + \ldots + m^k z^k.$$

La formule connue

$$\frac{\Sigma a_n z^n}{1 - z} = a_0 + (a_0 + a_1) z + (a_0 + a_1 + a_2) z^2 + \ldots$$

fournit alors

$$(141) \qquad \frac{P_{m.p}}{1 - z} = s_{1p} z + s_{2p} z^2 + \ldots + s_{mp}(z^m + z^{m+1} + \ldots)$$

où

$$(142) \qquad s_{np} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

L'inégalité

$$k^p < m^p \qquad (k = 1, 2, \ldots, m - 1)$$

entraîne

$$(143) \qquad s_{np} < m^{p+1}$$

et, par suite, h étant un entier positif supérieur ou égal à

$$(p + 1) \log m,$$

le spectre de la suite

$$(144) \qquad s_{1p}, \quad s_{2p}, \quad \ldots, \quad s_{mp}$$

à rythme uniforme $h_k = h$ est fourni par les mh premières décimales du nombre (notation du paragraphe **29**)

$$S = \frac{10^{mh}}{9mh} P_{mp}(10^{-mh}); \tag{145}$$

les décimales restantes fournissent un spectre périodique à rythme h, la période étant le nombre s_{mp} précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour compléter le nombre de chiffres de la période jusqu'à h.

Dans le cas, par exemple, de la suite (144) correspondant à $m = 16$, $p = 2$, on trouve

$$P_{16,2} = \frac{288 z^{18} - 289 z^{17} + z}{(z-1)} - \frac{32 z^{18} - 34 z^{17} + 2z}{(z-1)^3},$$

et comme $(p+1)\log m < 4$, on peut prendre $h = 4$; le spectre de la suite (144) est fourni par les soixante-quatre premières décimales du nombre

$$S = \frac{10^{64} P_{16,2}(10^{-64})}{964}$$
$$= 0,0001000500140030005500910140020402850385050606500819101 5\ldots.$$

La valeur numérique de s_{k2} ($k = 1, 2, \ldots, 16$) coïncide avec la $k^{\text{ième}}$ cannelure de ce spectre, c'est-à-dire avec le groupe de chiffres significatifs commençant par la $[4(k-1)+1]^{\text{ième}}$ et finissant par la $4k^{\text{ième}}$ décimale de S; le $n^{\text{ième}}$ chiffre de s_{k2} coïncide avec la $(2k - n + 1)^{\text{ième}}$ décimale de S. Ainsi, la somme $s_{9,2}$ coïncide avec la neuvième cannelure spectrale : c'est donc 285 ; le deuxième chiffre de $s_{13,2}$ est la cinquante-unième décimale de S : c'est donc 1.

III. — Procédé spectral de développement en séries.

32. L'évaluation numérique des coefficients d'une série $\Sigma a_n z^n$ se fait, par des procédés usuels, soit en calculant *individuellement* chaque coefficient a_n par une formule explicite

$$a_n = \varphi(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

soit en calculant a_n à l'aide de la suite déjà connue de coefficients

$a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ *par une formule de récurrence*

$$\varphi(n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots) = 0.$$

Le procédé spectral conduit *à calculer tous les coefficients a_n à la fois, ou bien un groupe voulu de ces coefficients, à l'aide de groupes de décimales d'un seul nombre S convenablement rattaché à la fonction $f(z)$ dont on cherche le développement en série.*

Les règles du paragraphe **12** conduisent à cet égard aux règles suivantes :

I. Lorsque les a_n sont des nombres *entiers réels positifs*, le coefficient a_0 est égal à la partie entière du nombre S représentant le spectre de $f(z)$ à un rythme h_k connu ; le coefficient a_n coïncidera avec le groupe de chiffres significatifs de S commençant par sa $(P_{n-1}+1)^{\text{ième}}$ et se terminant par sa $P_n^{\text{ième}}$ décimale, où $P_n = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$. Dans le cas de rythme uniforme, c'est le groupe commençant par la $[(n-1)h+1]^{\text{ième}}$ et finissant par la $nh^{\text{ième}}$ décimale de S. Dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, il commence par la

$$\left[(n-1)h + \frac{n(n-1)}{2}c + 1\right]^{\text{ième}}$$

et se termine par la $\left[(nh + \frac{n(n+1)}{2}c\right]^{\text{ième}}$ décimale de S.

Le $k^{\text{ième}}$ chiffre de a_n coïncide avec la $(P_n - k + 1)^{\text{ième}}$ décimale de S (la $k^{\text{ième}}$ raie de la $n^{\text{ième}}$ cannelure spectrale). Pour $h_k = h$, c'est la $(nh - k + 1)^{\text{ième}}$, et pour $h_k = h + ck$, c'est la

$$\left[nh + \frac{n(n+1)}{2}c - k + 1\right]^{\text{ième}} \text{ décimale}$$

de S.

II. Lorsque les a_n sont des *entiers quelconques*, réels ou imaginaires, on formera la suite adjointe $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ et l'on écrira le spectre S de la fonction

(146) $$\varphi(z) = \theta_0 a_0 + \theta_1 a_1 z + \theta_2 a_2 z^2 + \ldots$$

sous la forme $S = S_1 + iS_2$; les règles I appliquées à S_1 détermineront la suite α_n des parties réelles des $\theta_n a_n$, et les mêmes règles

appliquées à S_2 détermineront la suite β_n des coefficients de i des $\theta_n a_n$. On aura alors

$$a_n = \frac{1}{\theta_n}(\alpha_n + i\beta_n).$$

III. Lorsque les a_n ne sont pas des nombres entiers, la connaissance d'une transformation $\Delta[f]$ compatible avec la fonction $f(z)$ à développer conduira à une transformée (E) de $f(z)$; la connaissance d'un rythme spectral compatible avec la suite des coefficients M_n de (E) et des signes σ_n des parties réelles et imaginaires de ces coefficients permettra de former un spectre S de la suite M_n à un tel rythme. Les règles I et II appliquées à S détermineront alors les M_n, et la relation $\Omega(a_n, M_n) = 0$ imposée par le $\Delta[f]$ appliqué déterminera les coefficients inconnus a_n.

Un rythme h_k et les signes σ_n seront fournis par l'ensemble (D) de données qualitatives du problème.

IV. La détermination des valeurs *exactes* de $n+1$ premiers coefficients (abstraction faite des signes σ_n) n'exige que la connaissance d'une valeur *approchée* du nombre S avec P_n premières décimales exactes. Ce nombre de décimales est nh dans le cas de rythme spectral uniforme $h_k = h$, et $nh + \frac{n(n+1)}{2}c$ dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$.

Premier exemple. — Déterminer la suite $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{mp}$ des coefficients de la $p^{\text{ième}}$ puissance d'un polynome donné $P(x)$ de degré m à coefficients nombres entiers positifs, connaissant une limite supérieure A de ces coefficients.

En désignant par h un entier positif supérieur ou égal à log A, la suite des A_k admet le rythme spectral uniforme $h_k = h$ et le spectre en sera fourni par le nombre

$$S = [P(10^{-h})]^p$$

facile à calculer dans chaque cas considéré. Le coefficient A_k, ainsi qu'un chiffre voulu de A_k, sera fourni par une cannelure ou une raie déterminée du spectre S par les règles précédentes.

Pour développer, par exemple, par le procédé spectral, l'expression

$$f(x) = (1 + x + x^2)^6,$$

en sachant que les coefficients du développement ne surpassent pas 1000, il suffit de calculer le nombre

$$\begin{aligned} S = f(10^{-3}) &= 10^{-36}\, 1001001^6 \\ &= 1,006021050090126141126090050021006001 \end{aligned}$$

et d'en partager la partie décimale en tranches de trois chiffres : chacune de ces tranches fournit un coefficient A_k et l'on a ainsi

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + 6x + 21x^2 + 50x^3 + 90x^4 + 126x^5 + 141x^6 \\ + 126x^7 + 90x^8 + 50x^9 + 21x^{10} + 6x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

Il suffit même de calculer S avec dix-huit premières décimales pour avoir le développement complet de la fonction.

Deuxième exemple. — Développer en série de puissances la fonction rationnelle

(147) $$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

dont les zéros du dénominateur sont tous simples et ont pour module l'unité, en sachant que les coefficients inconnus du développement sont tous des nombres entiers.

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les zéros de $Q(x)$, et par A_1, $A_2, \ldots, A_m$ les coefficients des fractions simples qui leur correspondent, on aura

(148) $$f(z) = p(z) + \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{A_m}{z - \alpha_m},$$

où $p(z)$ désigne la partie entière de la fraction $f(z)$.

Si l'on développe le second membre de (148) en série

(149) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

on aura

(150) $$a_n = p + A_1 \alpha_1^n A_2 \alpha_2^n + \ldots + A_m \alpha_m^n,$$

où p désigne, s'il y a lieu, le coefficient de x^n dans le polynome $p(x)$. De (150) on conclut que

$$|a_n| < |p| + |A_1 \alpha_1^n| + \ldots + |A_m \alpha_m^n|,$$

et comme le module de α_n est égal à l'unité, on conclut que

(151) $$|a_n| < |p| + |A_1| + \ldots + |A_m|.$$

Si donc on désigne par h un entier quelconque supérieur ou égal à

$$\log[|p| + |A_1| + \ldots + |A_m|],$$

on aura

$$|a_n| < 10^h,$$

où h ne varie pas avec n, ce qui montre que la suite des a_n admet le rythme spectral uniforme $h_k = h$ et le problème s'achève facilement.

Dans le cas, par exemple, où les a_n sont des entiers positifs, leur spectre sera le nombre commensurable $S = f(10^{-h})$. Le coefficient a_n coïncidera avec l'entier composé du groupe de décimales de S commençant par la $[(n-1)h+1]^{\text{ième}}$ et se terminant par la $nh^{\text{ième}}$ de ces décimales; le $k^{\text{ième}}$ chiffre de a_n est fourni par la $(nh-k+1)^{\text{ième}}$ décimale de S.

Tel est le cas de la série de Lambert limitée

$$f(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \ldots + \frac{z^m}{1-z^m},$$

satisfaisant bien aux conditions précédentes. Ce qui précède fournit

$$|a_n| < n < m$$

(ce qui est d'ailleurs évident) et les a_n, étant des entiers positifs, admettent comme rythme spectral le rythme uniforme

$$h_k = h \geqq \log m;$$

leur spectre à un tel rythme sera, d'après le paragraphe 30, le nombre rationnel

$$S = \frac{1}{9h} + \frac{1}{92h} + \ldots + \frac{1}{9mh} \qquad \Big(9\alpha = \underbrace{99\cdots9}_{\alpha \text{ fois}}\Big).$$

Par exemple, pour $m < 100$, on peut prendre $h = 2$, ce qui fournit

$$S = 0{,}01020203020402040304020602040405020602 06\ldots$$

et, par suite,

$$f(z) = z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + 2z^7 + 4z^8 + 3z^9 + \ldots.$$

Troisième exemple. — Développer $f(z)$ en sachant que le

coefficient a_n est le nombre commensurable $\frac{M_n}{n}$ où les M_n sont des entiers à un nombre limité de chiffres, alternativement positifs et négatifs.

La transformation

$$\Delta[f] = f'(z)$$

compatible avec $f(z)$ se traduit par la transformée (E)

(152) $$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots$$

et entraîne la relation

(153) $$na_n - M_{n-1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

L'entier M_{n-1} sera déterminé comme $n^{\text{ième}}$ tranche à h chiffres du nombre

$$S = f'(-10^{-h})$$

jouant le rôle du spectre de $F(z)$ à rythme uniforme $h_k = h \geqq$ au nombre maximum de chiffres de M_n. Les a_n seront dès lors fournis par la relation (153) laissant a_0 indéterminé.

Par exemple pour

$$f(z) = \int \frac{23 - 19z - 2z^2 + 2z^3}{1 - z^2}\,dz$$

et $h = 2$, on trouve

$$S = f'(-0{,}01) = 23{,}19211721172117\ldots;$$

les coefficients M_n se reproduisent, en valeur absolue, à partir du troisième, la période étant 2117, et l'on a ainsi

$$f(z) = a_0 - 23z + \frac{19}{2}z^2 - \frac{21}{3}z^3 + \frac{17}{4}z^4 - \frac{21}{5}z^5 + \frac{17}{6}x^6 - \ldots.$$

Quatrième exemple. — Développer $f(z)$ en sachant que les a_n sont racines carrées de nombres entiers positifs à un nombre limité de chiffres.

En posant

(154) $$|f(re^{\varphi i})|^2 = \psi(r, \varphi),$$

la transformation

(155) $$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\sqrt{z}, e^{ti})\,dt$$

compatible avec $f(z)$ (§ 16, règle III) transforme la fonction en une série (E) avec la relation

$$a_n^2 - M_n = 0.$$

En prenant pour h un entier supérieur ou égal au nombre maximum de chiffres de a_n, le spectre des M_n à rythme $h_k = h$ sera le nombre réel

(156) $$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\left(10^{-\frac{h}{2}}, e^{ti}\right) dt$$

dont la $n^{\text{ième}}$ tranche à h chiffres fournira M_n et l'on aura

$$a_n = \sqrt{M_n}.$$

Cinquième exemple. — Développer $f(z)$ en sachant seulement que les a_n sont des entiers positifs et que $z = 0$ est un point ordinaire de la fonction.

La convergence de la série de puissances représentant $f(z)$ au voisinage de $z = 0$ implique l'existence d'un nombre positif fixe tel que pour toute valeur de n on ait $\sqrt[n]{a_n} < A$. En désignant par c un entier quelconque supérieur ou égal à $\log A$, le rythme spectral uniformément accéléré $h_k = ck$ sera compatible avec la suite des a_n et son spectre sera le nombre réel

(157) $$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\,\theta\left(\frac{qe^{-ti}}{\rho}\right) dt$$

où

(158) $$\theta(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} z^n, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \qquad \rho = \text{const.} < \frac{1}{A}.$$

On peut également exprimer le nombre S par l'intégrale définie (39) du paragraphe 5,

(159) $$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} R(\alpha, Bt)\, dt,$$

où $R(r, \varphi)$ désigne la partie réelle de $f(re^{\varphi i})$ et où il faut attribuer aux constantes α et β les valeurs

(160) $$\alpha = 10^{-c}, \qquad \beta = \sqrt{2 \log \text{nat}\, 10}.$$

Si l'on partage la suite de décimales de S en tranches consécu-

tives de c, $2c$, $3c$, ... décimales, le coefficient a_0 coïncidera avec la partie entière de S et le coefficient a_n avec l'entier composé de chiffres significatifs de la $n^{\text{ième}}$ de ces tranches.

IV. — Procédé spectral d'évaluation des intégrales définies.

33. Le procédé spectral s'applique de deux manières différentes au calcul des intégrales définies.

Première manière. — Dans le cas d'une suite d'intégrales définies $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, ... (simples ou multiples, réelles ou imaginaires) telles que $\mathfrak{J}_n$ coïncide avec les coefficients a_n d'une fonction $f(z)$, *le calcul des $\mathfrak{J}_n$ s'effectuerait suivant les règles du paragraphe* **32** *à l'aide de cannelures d'un spectre rattaché à $f(z)$ et de la relation existant entre les entiers formant ces cannelures et les a_n.*

C'est ainsi que l'intégrale de Cauchy,

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

prise le long d'une circonférence C ayant comme centre $z = a$, dans lequel la fonction $f(z)$ est holomorphe, s'exprime, toutes les fois que sa valeur numérique est un nombre *entier*, directement comme l'entier formant une cannelure déterminée d'un spectre de la fonction $f(a+z) - f(a)$ (abstraction faite des signes σ_n).

Lorsque les $\mathfrak{J}_n$ ne sont pas des nombres entiers, on remplacera $f(z)$ par sa transformée correspondant à une transformation $\Delta[f]$ compatible avec $f(z)$.

De même, une intégrale de la forme

$$\mathfrak{J}_n = \int_a^b u v^n\,dt \tag{161}$$

(u et v fonctions de t) s'obtiendra à l'aide de cannelures d'un spectre, en remarquant que les $\mathfrak{J}_n$ coïncident avec les coefficients du développement de la fonction

$$f(z) = \int_a^b \varphi(vz)\,u\,dt \tag{162}$$

suivant les puissances de z, où $\varphi(z)$ est l'une ou l'autre des fonctions

(163) $$\varphi(z) = \frac{z(z^m - 1)}{z - 1}, \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1 - z},$$

suivant que la suite des $\mathfrak{J}_n$ est limitée ou illimitée.

Seconde manière. — Dans le cas où une intégrale $\mathfrak{J}$ représente elle-même le spectre, à un rythme h_k connu, d'une suite connue d'entiers M_0, M_1, M_2, ..., *elle aura pour valeur numérique* M_0 *suivi, comme partie entière, de la suite de décimales que l'on forme en rangeant bout à bout les groupes numériques* G_0, G_1, G_2, ... *correspondant à la suite* M_k *et au rythme* h_k, *après avoir affecté les parties réelles et imaginaires des* M_k *de signe positif.*

Tel est, par exemple, le cas de l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int_a^b \varphi(10^{-h} v) u \, dt$$

lorsque les $\mathfrak{J}_n$, définis par (161), sont des entiers dont le nombre de chiffres ne dépasse pas h; l'intégrale, considérée comme spectre des $\mathfrak{J}_n$ à rythme $h_k = h$, aura comme partie entière la valeur $\mathfrak{J}_0$ et pour partie décimale $G_1 G_2 G_3 \ldots$, où G_k est l'entier $\mathfrak{J}_k$ précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre de chiffres du groupe numérique G_k soit égal à h.

Tel est aussi le cas de l'intégrale

(164) $$\mathfrak{J} = \int_a^b \xi(v) u \, dt,$$

où, les h_k étant une suite illimitée quelconque d'entiers positifs, $\xi(z)$ désigne la fonction *entière*

(165) $$\xi(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n z^n, \qquad g_n = 10^{-(h_1+h_2+\ldots h_n)}.$$

Lorsque $\mathfrak{J}_n$ est un nombre commensurable de la forme $\frac{M_n}{n}$ (M_n = entier fixe ou variable avec n), on remplacera $\xi(z)$ par $z\xi'(z)$ (*voir* aussi le *quatrième exemple* du paragraphe **6**).

En prenant pour les h_k une suite d'entiers croissant assez rapidement avec leur rang, on aura ainsi une infinité d'intégrales (164) qui s'expriment *à l'aide de nombres transcendants de Liouville* (§ 14).

Les intégrales de la forme

$$(166) \qquad \mathfrak{J} = \int_0^\infty e^{-t^2} \psi(\alpha, \beta t)\, dt,$$

où $\psi(r, \varphi)$ est la partie réelle d'une fonction $f(re^{\varphi i})$, la fonction $f(z)$ étant développable en série de puissances de z à coefficients nombres entiers, se calculent, pour certaines valeurs des constantes α et β, comme spectres des coefficients de $f(z)$ à un rythme uniformément accéléré (§ 5). Dans le cas, par exemple, où $f(z)$ est la fonction rationnelle représentant l'ensemble de $m < 100$ premiers termes de la série de Lambert (§ 32), et en faisant

$$\alpha = 0{,}01, \qquad \beta = \sqrt{2} \log \text{nat}\, 10,$$

l'intégrale $\mathfrak{J}$ aura pour valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ multipliée par le nombre

$$0{,}0102020302040204030402060204040502060206\ldots,$$

dont la partie décimale s'écrit en rangeant bout à bout les groupes $G_1, \ldots, G_m$, où G_k est égal au nombre de diviseurs de k précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre total de chiffres de G_k soit égal à $2k$.

V. — Détermination spectrale des fonctions.

34. Les procédés usuels de détermination d'une fonction analytique par les *conditions discrètes* exigent généralement une *infinité* de données numériques, comme le sont, par exemple, les coefficients de la série de Taylor, de la série trigonométrique, exponentielle, etc., correspondant à la fonction.

M. Borel a indiqué divers autres modes de détermination d'une fonction *entière* $f(z)$ par des conditions discrètes, par exemple à l'aide des valeurs que prend $f(z)$ pour une suite discrète de valeurs de z, avec l'adjonction d'un ensemble (C) de conditions

supplémentaires de nature *qualitative* concernant le mode de croissance de la fonction avec z [1].

Dans les modes actuellement connus de détermination des fonctions par de pareilles conditions, le nombre de données numériques n'est *limité* qu'exceptionnellement, dans des cas très particuliers où l'on connaît à l'avance la forme analytique de la fonction à un nombre limité de constantes près (par exemple dans le cas où la fonction se réduit à un polynome algébrique, exponentiel, trigonométrique, etc.).

Or, la méthode spectrale révèle une infinité de catégories de fonctions dont la détermination se ramène *à un problème dépendant d'un nombre limité de paramètres*, à la condition d'y adjoindre un ensemble (D) de conditions ne concernant que les *signes*.

Nous allons le préciser dans ce qui suit.

Nous considérerons la fonction $f(z)$ d'une variable z comme *numériquement déterminée* si, en y précisant un ensemble de *signes* restés indéterminés, à toute valeur *numérique* de z correspond une valeur *numérique* de $f(z)$.

Nous considérerons une catégorie (f) de fonctions comme une *catégorie à m paramètres* si, en attribuant des valeurs numériques déterminées à m nombres variables, indépendants entre eux, que laisse *arbitraires* la définition de la catégorie (f), on engendre une fonction numériquement déterminée faisant partie de la catégorie, et cela de manière que toute fonction de la catégorie puisse être engendrée de cette façon.

La méthode spectrale conduit alors aux résultats exposés dans ce qui suit.

D'abord, la *catégorie* (E) de fonctions analytiques $f(z)$, développables en série de puissances de z à coefficients M_n *nombres entiers*, est à considérer comme une catégorie *à deux paramètres*. Ceux-ci sont :

1° Le nombre entier positif β supérieur ou égal à l'entier positif M (dont l'existence est assurée par le fait que le rayon de

---

(1) E. Borel, *Sur l'interpolation* (*C. R. Acad. Sc.*, 1897, 1er sem., p. 673-676).

convergence de la série n'est pas nul) tel que les $|M_n|$ ou bien les $\sqrt[n]{|M_n|}$ ne surpassent pas 10^M pour aucune valeur de n;

2° La valeur S que prend pour $z = 10^{-\beta}$ une fonction rattachée à $f(z)$ d'une manière convenable; le nombre S n'est autre que le spectre de $f(z)$ à rythme uniforme $h_k = \beta$, ou bien à rythme uniformément accéléré $h_k = \beta k$.

Des deux nombres S et β, le premier peut varier *continuellement* de zéro à infini, et le second d'une manière *discontinue* à partir d'une valeur positive β_0 jusqu'à l'infini. Le couple de valeurs numériques (S, β) étant donné, la fonction $f(z)$ est numériquement déterminée par les règles du paragraphe 32.

Une autre catégorie (f) quelconque de fonctions admet des transformations $\Delta[f]$ établissant une correspondance entre les fonctions de cette catégorie et celles de la catégorie (E) (§ 16-19). Une transformation $\Delta[f]$ compatible avec $f(z)$ entraîne une relation $(f, E) = 0$ entre $f(z)$ et sa transformée (E) par le $\Delta[f]$ appliqué. Cette relation peut introduire un certain nombre de paramètres variables γ_i dans la fonction $f(z)$ qu'elle détermine et ces paramètres peuvent provenir : 1° des paramètres impliqués dans le $\Delta[f]$ même; 2° des constantes indéterminées nouvelles qu'introduit la relation $(f, E) = 0$, par exemple par l'intégration, par des termes d'une série laissés indéterminés par une relation de récurrence, etc.

Le nombre q de paramètres γ_i est plus ou moins considérable, pour une même catégorie (f), suivant le $\Delta[f]$ appliqué, et peut varier de zéro à infini. Nous désignerons comme *indice spectral* δ de la catégorie (f) *le plus petit parmi les nombres* $q + 2$ rattachés ainsi à (f) par les divers $\Delta[f]$ compatibles avec (f).

Le procédé spectral de détermination des fonctions conduit alors à la règle suivante :

Une catégorie (f) de fonctions est à considérer comme catégorie à un nombre de paramètres égal à son indice spectral.

Comme paramètres sont à considérer : 1° les paramètres γ_i introduits par celui des $\Delta[f]$ compatibles avec la catégorie (f) auquel correspond le plus petit nombre q; 2° les deux paramètres S et β de la catégorie (E).

L'indice spectral δ d'une catégorie (f) indique donc le nombre de conditions strictement nécessaires pour la détermination numérique complète d'une fonction particulière, faisant partie de (f), par le procédé spectral.

Comme *condition* est à considérer toute condition déterminant :

1° Ou bien une valeur numérique β_0 du paramètre de rythme β compatible avec les coefficients de la fonction (E) en correspondance avec $f(z)$;

2° Ou bien une valeur numérique du nombre S représentant le spectre de (E) à rythme $h_k = \beta_0$ ou $h_k = \beta_0 k$;

3° Ou bien la valeur numérique d'un paramètre γ_i.

35. La valeur de l'indice spectral δ dépend essentiellement de *particularités d'ordre arithmétique* caractérisant les coefficients du développement de la fonction générale de la catégorie (f) considérée, en série d'une forme déterminée, au voisinage d'un point $z = x$ du plan des z. *Ces particularités sont celles concernant la manière de rendre collectivement les coefficients de la série nombres entiers;* la manière se résume dans la forme d'un $\Delta[f]$ compatible avec f.

Le point x, s'il n'est pas précisé par la définition de la catégorie, joue lui-même le rôle d'un paramètre de (f) et l'indice δ se trouve de ce fait augmenté d'une unité.

De ce qui précède et des règles des paragraphes **16** et **21** résultent comme conséquences les faits suivants :

I. L'indice spectral de la *catégorie* (E) est $\delta = 2$: une fonction particulière de cette catégorie est déterminée par deux conditions. L'arc, par exemple, d'une courbe plane est complètement déterminé comme fonction de l'abscisse x par la condition qu'il soit développable en série de puissances de x à coefficients entiers alternativement positifs et négatifs plus petits que 100, et que sa longueur entre les points $x = -0{,}01$ et $x = 0$ soit égale à la périphérie du cercle de rayon 1.

II. L'indice spectral de la catégorie de fonctions développables en série de puissances de z à coefficients a_n, n'ayant qu'un nombre

limité de décimales, est $\delta = 3$. Les paramètres sont : β, S et l'entier g désignant une limite supérieure du nombre de décimales de a_n.

III. L'indice spectral de la catégorie (f), composée de fonctions *algébriques* à coefficients a_n nombres *commensurables*, est $\delta = 4$. Les paramètres sont : β, S et les deux paramètres γ_1 et γ_2 de la transformation

$$\Delta[f] = \gamma_1 f(\gamma_2 z)$$

compatible avec cette catégorie de fonctions.

IV. Pour la catégorie de fonctions à a_n égal à une fraction décimale périodique dont le nombre γ_1 de chiffres de la partie non périodique, et le nombre γ_2 de chiffres de la période *ne varient pas avec* n, on a

$$\delta = 4.$$

Les paramètres sont : β, S_1, γ_1, γ_2 (règle I, § 16).

V. Lorsque les a_n sont $p^{\text{ièmes}}$ racines de nombres entiers ($p =$ entier fixe), on a

$$\delta = 2 \qquad (\text{paramètres } \beta \text{ et } S).$$

VI. Lorsque a_n est de la forme $M_n \varphi_n$, où les M_n sont des entiers et les φ_n des nombres fractionnaires à q paramètres, on a

$$\delta = q + 2.$$

Ainsi, pour $a_n = \dfrac{M_n}{1.2.3\ldots n}$, on a

$$\delta = 2;$$

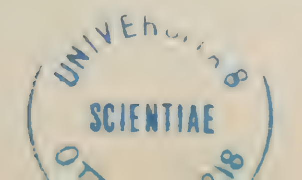
pour $a_n = (\gamma_1 + \gamma_2 n)^{\gamma_3} M_n$, on a

$$\delta = 5.$$

VII. L'indice spectral des fonctions y satisfaisant à une relation *numérique donnée*

$$F(z, u, y) = \sigma. \tag{167}$$

où u désigne une fonction *arbitraire* d'une catégorie (u) à indice spectral δ_1, est lui-même $\delta = \delta_1$.



Ainsi, deux fonctions u et y sont numériquement déterminées par une *équation indéterminée* (167) et par les deux conditions suivantes :

1° Que l'une d'elles soit développable en série de puissances de z à coefficients nombres entiers n'ayant pas plus de m chiffres ; 2° que l'une d'elles prend une valeur numérique donnée pour $z = 10^{-m}$.

VIII. L'indice spectral des fonctions y satisfaisant à l'*équation différentielle indéterminée*

$$F(z, u, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0, \qquad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dz^k}, \tag{168}$$

où F est une fonction *donnée* à coefficients *numériques*, et u une fonction arbitraire d'une catégorie (u) à m paramètres, est

$$\delta = m + p.$$

Ainsi, la fonction y est numériquement déterminée par l'équation (168) et par les conditions suivantes :

1° Que u soit développable en série de puissances de z à coefficients entiers n'ayant pas plus de l chiffres; 2° que, soit u et $p-1$ parmi les variables $y, y', \ldots, y^{(p)}$ figurant dans (168), soit p variables $y, y', \ldots, y^{(p)}$, prennent pour $z = 10^{-l}$ des valeurs numériques données à l'avance.

Le problème, par exemple, de déterminer la courbe plane $y = f(x)$ dont la sous-tangente est développable en série de puissances de x à coefficients nombres entiers positifs n'ayant pas plus de l chiffres et ayant au point $x = 10^{-l}$, $y = y_0$ la longueur égale à la périphérie du cercle de rayon 1, est un problème parfaitement déterminé. La courbe est celle définie par l'équation

$$y = \frac{y_0}{\varphi(10^{-h})} \varphi(x), \tag{169}$$

où les coefficients de la fonction

$$\varphi(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots \tag{170}$$

sont déterminés par la relation de récurrence

$$(n+1) M_0 \lambda_{n+1} + n M_1 \lambda_n + (n-1) M_2 \lambda_{n-1} + \ldots + M_n \lambda_1 = \lambda_n, \tag{171}$$

avec $M_0 = 6$ et M_n égal à $n^{\text{ième}}$ groupe à l décimales du nombre 2π. Dans le cas de $l = 1$, on a

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{72} - \frac{31}{432} x^3 + \ldots,$$

le coefficient λ_n de x^n étant déterminé par la relation de récurrence (171), où $M_0 = 6$ et M_n égal à la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre 2π.

IX. Les règles précédentes ne sont pas altérées par le fait que $z = 0$ soit un point critique algébrique de $f(z)$ autour duquel se permutent un nombre donné μ de branches de f, le développement en série de puissances de z étant remplacé par celui de puissances de $z^{\frac{1}{\mu}}$.

X. Lorsque, dans ces règles, $z = 0$ est un pôle d'un ordre donné p de $f(z)$, l'indice spectral δ de la catégorie (f) se trouve augmenté du nombre p_1 (à cause des p paramètres b_k figurant comme coefficients des p termes $b_k z^{-k}$).

XI. Toute fonction analytique $f(z)$ peut être représentée dans un cercle donné C_α ayant pour centre un point ordinaire $z = \alpha$ de f et dans lequel la fonction est holomorphe, avec une approximation donnée à l'avance, par une fonction particulière d'une catégorie de fonctions à indice spectral $\delta = 2$, ou par un polynome en z à indice spectral $\delta = 3$ (§ **19-23**).

XII. Les singularités d'une fonction analytique quelconque, comprises dans un cercle donné C_α ayant comme centre un point ordinaire $z = \alpha$ de f, sont les mêmes que celles d'une fonction déterminée d'une catégorie à indice spectral $\delta = 2$ (§ **18**).

XIII. Les zéros d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans un cercle C_α coïncident avec les pôles d'une fonction particulière d'une catégorie à indice spectral $\delta = 2$ (§ **18**).

36. Les considérations précédentes font intervenir des paramètres qui paraissent être en contradiction avec la notion usuelle de *paramètres variables*. La catégorie (E) de fonctions dévelop-

pables en série de puissances à coefficients nombres entiers apparaît, d'après les conceptions usuelles, comme dépendant d'un nombre *infini* de paramètres qui sont les coefficients mêmes de ce développement, assujettis à la seule condition d'être des nombres entiers M_k tels que $\sqrt[k]{|M_k|}$ n'augmente pas indéfiniment avec k. Par contre, dans la méthode spectrale de détermination des fonctions, ces mêmes paramètres apparaissent comme *segments d'un même nombre décimal* S, chaque segment étant composé d'un groupe déterminé de décimales successives du nombre S. Ce nombre n'est autre qu'un *spectre* de la fonction considérée; le mode de sa *segmentation*, par lequel S fournit, à signes près, la suite de coefficients de la fonction, varie d'une manière discontinue avec un autre paramètre β qui est un entier positif variable et qui le caractérise.

Les deux nombres S et β jouent bien le rôle de deux paramètres variables de la catégorie (E) de fonctions : leur variation fait passer d'une fonction particulière (E) à une autre, et toute fonction de la catégorie peut être engendrée de cette manière. Il existe même (à signes des coefficients près) une *correspondance réciproque et univoque* entre les fonctions (E) et les nombres S et β : à deux fonctions (E) distinctes correspondent deux couples distincts de valeurs numériques (S, β), et réciproquement.

Le paramètre S *condense ainsi un nombre limité ou illimité de paramètres en une seule suite de chiffres*, et ses variations *continues*, engendrées par les variations *discontinues* de ses chiffres, avec les variations *discontinues* du paramètre β, engendrent l'infinie diversité de fonctions (E) (sans en omettre aucune) et par cela même l'infinie diversité d'autres catégories de fonctions en correspondance avec les fonctions (E).

La contradiction avec la conception usuelle de paramètres variables n'est manifestement qu'apparente : en réalité, c'est bien une *infinité* de données numériques qui est fournie par le spectre S sous l'apparence d'*une seule* dont les *segments* convenablement délimités révèlent les valeurs à attribuer à une infinité de paramètres (qui sont les coefficients de la série) pour satisfaire aux conditions d'un problème. Le fait ne diffère guère de celui qui se présente dans l'artifice de problèmes-devinettes par lequel le devin détermine instantanément *plusieurs* nombres pensés d'après *une*

seule donnée numérique qu'on lui énonce et dont les divers segments lui révèlent autant de données qu'il y a d'inconnues.

37. Comme on le voit, les *spectres numériques* jettent quelque lumière sur le *rôle joué par les suites de chiffres dans la détermination des fonctions*. Ce rôle a déjà été indiqué par M. Borel dans ses considérations profondes sur la notion de fonction en général. Nous croyons utile de reproduire, à cette place, quelques-unes de ces considérations à cause de rattaches qu'ont avec elles les idées développées dans cette dernière Partie de l'Ouvrage sur la représentation de fonctions par une suite de chiffres.

Une fonction f de n variables $x, y, z, t, \ldots$, *sans être assujettie à aucune restriction*, peut être définie par cette seule condition qu'à tout système de valeurs de n variables x, y, z, t, ... correspond une valeur bien déterminée de f. (On pourrait d'ailleurs considérer seulement les systèmes de valeurs appartenant à un certain domaine; pour les autres la fonction ne serait pas définie. On pourrait aussi supposer, plus généralement, qu'il y a plusieurs valeurs de f, ou même une infinité dénombrable, qui correspond aux valeurs données des variables.) Le nombre de variables importe peu dans une telle conception de fonction; on sait, en effet, que l'ensemble des points de l'espace a même puissance que l'ensemble des points d'un segment limité d'une droite, qu'on peut d'ailleurs toujours supposer compris entre 0 et 1. Si au système de valeurs x, y, z, t, ... correspond ainsi la valeur X comprise entre 0 et 1, il suffit de poser

$$f(x, y, z, t, \ldots) = \varphi(X)$$

pour définir une fonction $\varphi(X)$ d'*une seule variable* X qui correspond d'une manière bien déterminée à la fonction

$$f(x, y, z, t, \ldots).$$

Cette correspondance est réciproque et univoque : deux fonctions étant regardées comme distinctes lorsqu'elles ont une valeur différente en l'*un* au moins des points où elles sont définies, à deux fonctions distinctes $f(x, y, z, t, \ldots)$ correspondent deux fonctions distinctes $\varphi(X)$ et réciproquement.

D'autre part, *on peut ramener la puissance de l'ensemble*

de fonctions $\varphi(X)$ *à la puissance d'une suite indéfinie de chiffres.* Ainsi, on n'introduit pas de restrictions sérieuses en supposant que la fonction $\varphi(X)$ a constamment une valeur comprise entre 0 et 1. Si l'on écrit cette valeur dans le système, par exemple, de numération de base 2, elle sera de la forme

$$\varphi(X) = 0,10100111\ldots,$$

tous les chiffres décimaux étant égaux à 0 ou à 1. Et comme, X étant un nombre quelconque compris entre 0 et 1, tous les nombres positifs sont de la forme $n + X$, n étant un nombre entier, il est possible de définir, à l'aide de $\varphi(X)$, un ensemble de points de la manière suivante : *le point* $n + X$ *appartiendra à l'ensemble si, dans la valeur de* $\varphi(X)$, *la* $n^{\text{ième}}$ *décimale est* 1 ; *il ne lui appartiendra pas si cette* $n^{\text{ième}}$ *décimale est* 0.

A chaque fonction $\varphi(X)$ correspond un tel ensemble qui est d'ailleurs unique ; réciproquement, à un tel ensemble correspond une fonction unique $\varphi(X)$. On peut l'exprimer en disant que *l'ensemble des fonctions* $\varphi(X)$ *a une puissance au plus égale à la puissance de l'ensemble des ensembles de points réels positifs*, ou même, si l'on veut, de l'ensemble des ensembles de points compris entre 0 et 1.

Tant que l'on reste dans le cas général, le problème de reconnaître, par ce procédé, si deux fonctions données $\varphi(X)$ et $\varphi_1(X)$ sont identiques ou différentes, présente des difficultés pratiques insurmontables. Il n'est pas possible, en effet, d'établir une méthode telle que, si elles sont différentes, on en soit assuré au bout d'un nombre *fini* d'opérations ; cela tient à ce que le continu n'est pas dénombrable.

Mais lorsque les fonctions $\varphi(X)$ et $\varphi_1(X)$ sont *continues*, il en serait tout autrement. En effet, si deux telles fonctions coïncident pour les valeurs *commensurables* de X, elles coïncident pour *toute* valeur de X ; si donc elles ne sont pas identiques, on s'en apercevra sûrement par la seule considération des valeurs commensurables : *il existe* certainement un nombre commensurable $\frac{p}{q}$ tel que $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)$ diffèrent, c'est-à-dire aient seulement m premières décimales communes, m étant un nombre déterminé.

Dès lors, si l'on range tous les nombres commensurables en une

suite u_1, u_2, u_3, ..., ce qu'on sait faire, et si l'on calcule les valeurs

$$(172) \quad \begin{cases} \varphi(u_1), & \varphi(u_2), & \varphi(u_3), & \ldots, \\ \varphi_1(u_1), & \varphi_1(u_2), & \varphi_1(u_3), & \ldots \end{cases}$$

avec n décimales exactes, il arrivera nécessairement, si l'on fait successivement cette opération pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, que, pour une valeur *finie* de n, c'est-à-dire au bout d'un nombre *fini* d'opérations, on sera assuré que les deux fonctions ne sont pas identiques. D'ailleurs, il est évident que ce nombre ne sera pas connu d'avance et que, par suite, on ne pourra pas, de calculs aussi longs qu'ils soient, conclure à l'identité des deux fonctions. Mais si elles diffèrent, on est sûr de s'en apercevoir avec assez de persévérance ([1]).

Or, la méthode spectrale offre, précisément, un moyen *efficace* de décider, par la seule considération de *spectres*, c'est-à-dire d'un ensemble ayant une puissance au plus égale à celle de l'ensemble des ensembles de points réels positifs, si deux fonctions φ et φ_1 appartenant à une même *catégorie spectrale* (§ 39) sont identiques ou différentes. De plus, les spectres conduisent non seulement à *distinguer* les fonctions d'une catégorie, mais aussi *à reconstituer* les fonctions particulières de la catégorie à laquelle ils se rattachent.

38. Ce qui précède fait ressortir la possibilité et l'utilité d'une classification des fonctions $f(z)$ d'après la manière dont les coefficients a_n se laissent collectivement transformer en *nombres entiers*, c'est-à-dire d'après la manière dont la fonction se laisse rendre *analysable* par la méthode spectrale (classification *spectrale* des fonctions). Cette manière se trouvant résumée dans la forme d'un $\Delta[f]$ compatible avec f, deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ appartiendraient à une même *catégorie* spectrale (f) s'il existe pour chacune d'elles au moins un point du plan des z au voisinage duquel les deux fonctions admettent un même $\Delta[f]$, ne différant d'une fonction à l'autre que par les valeurs numériques d'un certain nombre de paramètres qu'il contient.

([1]) E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions* (2e édition, 1914) (Note III : *La notion de fonction en général*, p. 123-126).

L'addition d'une fonction (E) arbitraire à une fonction arbitraire de la catégorie (E), ainsi que la multiplication par une fonction (E) arbitraire, donnent des fonctions de même catégorie. Il en est de même des dérivations effectuées un nombre quelconque de fois, ainsi que des changements de variable indépendante ayant pour effet de multiplier les coefficients a_n par des nombres entiers. *L'ensemble de fonctions de la catégorie* (E) *forme donc un groupe par rapport à ces opérations.* Le champ de telles opérations s'élargit, d'ailleurs, pour d'autres catégories spectrales de fonctions.

Les exemples traités dans les paragraphes précédents mettent en évidence un certain nombre de catégories spectrales de fonctions. Telles seraient, par exemple, les catégories suivantes : fonctions développables en série de puissances à coefficients a_n nombres entiers ou ayant un nombre fini de décimales; fonctions à a_n racines $p^{\text{ième}}$ de nombres entiers; fonctions à a_n commensurable dont le dénominateur n'augmente pas plus vite que $10^{n\alpha}$ ($\alpha =$ const. positive) et n'a qu'un nombre limité de facteurs premiers (catégorie embrassant toutes les fonctions algébriques à a_n commensurable); fonctions à a_n commensurable dont le nombre de chiffres de la partie non périodique et celui de la période restent finis, ou bien présentent une régularité donnée à l'avance, ou bien n'augmentent pas plus vite qu'une fonction donnée $\varphi(n)$, etc.

La méthode de MM. Gomes Teixeira et Hurwitz, pour préciser la forme des coefficients a_n caractérisant les fonctions qui satisfont à une équation différentielle

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \text{ [1]}$$

algébrique en $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$, conduit à considérer toutes les fonctions analytiques *non hypertranscendantes*, à a_n *commensurable*, comme faisant partie d'une même catégorie (y) de fonctions à indice spectral *fini*, etc.

L'intérêt d'une telle classification, malgré son caractère artificiel,

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1885 et 1889.

résiderait dans la possibilité qu'elle fournit de déterminer les fonctions définies par des conditions *très générales* et dépendant, dans un autre mode de classification, d'un nombre *infini* de paramètres, *à l'aide d'un nombre fini de données numériques*. Et il est à présumer que des recherches plus approfondies conduiront à des résultats intéressants sur les relations entre les propriétés *arithmétiques* des coefficients a_n, caractérisant la catégorie, et la *grandeur de l'indice spectral* δ de la catégorie, indiquant le nombre minimum de ces données.

Comme on le voit, le procédé spectral de détermination des fonctions revient, en somme, à considérer une fonction comme correspondant à un point de l'*espace fonctionnel* dans lequel une catégorie spectrale de fonctions représenterait un *champ fonctionnel* et où une *transmutation* déterminée $\Delta|f|$, appliquée à f, établit *effectivement* la correspondance entre la fonction et le point. Une transmutation $\Delta|f|$ jouerait ainsi pour les points de l'espace fonctionnel un rôle analogue à celui que joue une transformation ponctuelle pour les points de l'espace. Un $\Delta|f|$ peut n'avoir un sens et n'être défini que dans un champ fonctionnel, de même qu'en géométrie ordinaire une transformation ponctuelle peut n'être définie que pour les points d'une région de l'espace, d'une surface, d'une ligne (¹).

(¹) *Voir* pour la théorie générale des transmutations le Chapitre VIII de *La série de Taylor et son prolongement analytique*, par M. J. Hadamard (*Scientia* n° 12, Gauthier-Villars, Paris, 1901).

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

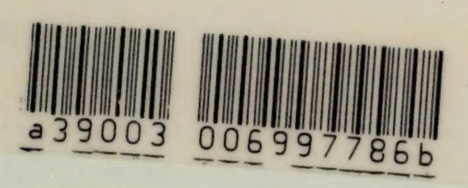
SPECTRES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

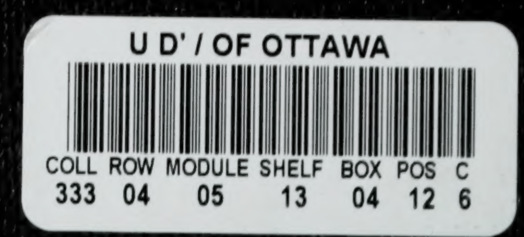
QUATRIÈME PARTIE.

LA MÉTHODE SPECTRALE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

60307 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.


a39003 006997786b


U D' / OF OTTAWA
COLL ROW MODULE SHELF BOX POS C
333 04 05 13 04 12 6